Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **21.09.2008**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik III, Bachelor-Studiengang Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3j \\ 3 & -4 & 3j \\ -j & j & 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -j \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu $\mathcal{A}$ sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

b) Zeigen Sie, dass 2 ein Eigenwert von $\mathcal{A}$ ist.

c) Ist $\mathcal{A}$ diagonalisierbar? (Antwort begründen!)

Lösung. a) Es gilt $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} -j \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also sind -1 und 1 die zugehörigen Eigenwerte von $\mathcal{A}$

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(2) &= \det(2\mathcal{E}_3 - \mathcal{A}) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3j \\ 3 & -6 & 3j \\ -j & j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3j \\ 1 & -1 & 0 \\ -j & j & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

c) Da $\mathcal{A}$ drei verschiedene Eigenwerte hat, muss die Matrix diagonalisierbar sein.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

(1) Für welches $a \in \mathbb{R}$ hat das Vektorfeld $\vec{F}_a(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} (2+3a)x_1 \sin x_2 \\ ((x_1+a)^2 + x_3)\cos x_2 + x_2 x_3 \sin x_2 \\ -(x_2 - a)\cos x_2 + 2\sin x_2 \end{pmatrix}$ eine Stammfunktion?

(2) Sei

$$U(x_1, x_2, x_3) := -x_2 x_3 \cos x_2 + (x_1^2 + 2x_3)\sin x_2$$

Vergleichen Sie ∇U mit $\vec{F}_0$.

(3) Sei C der Halbkreis mit Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \pi/3 \\ \sin t \end{pmatrix}$, mit $t \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Was ist dann $\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$?

Lösung. (1) Es gilt

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = (-2 + 3x_1)a \cos x_2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = a \sin x_2$$

Genau dann hat $\vec{F}_a$ eine Stammfunktion, wenn $a = 0$ ist.

(2) Es gilt

$$\vec{F}_0 = \begin{pmatrix} 2x_1 \sin x_2 \\ (x_1^2 + x_3) \cos x_2 + x_2 x_3 \sin x_2 \\ -x_2 \cos x_2 + 2 \sin x_2 \end{pmatrix} = \nabla U$$

(3) Die Kurve C beginnt bei $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und endet bei $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit wird

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = U(\vec{B}) - U(\vec{A}) = 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)
a) Angenommen, es seien X und Y zwei stochastisch unabhängige diskrete Zufallsgrößen, wobei X poissonverteilt mit Parameter λ und Y poissonverteilt mit Parameter μ sein soll. Welcher Verteilung unterliegt dann $X + Y$? (Man benutze den Binomialsatz).

b) Eine Fabrik stellt Kondensatoren her. Die Anzahl der defekten Geräte einer Tagesproduktion sei poissonverteilt mit Parameter $\lambda = 4$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen an 2 aufeinander folgenden Tagen nicht mehr als 3 defekte Kondensatoren an ?

Lösung. a) Es gilt

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= \sum_{\ell=0}^{k} P(X = \ell) P(Y = k - \ell) \\ &= e^{-\lambda-\mu} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\lambda^\ell \mu^{k-\ell}}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda-\mu}}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} \lambda^\ell \mu^{k-\ell} \\ &= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-\lambda-\mu} \end{aligned}$$

Also ist auch $X + Y$ poissonverteilt, und zwar mit Parameter $\lambda + \mu$.

b) Sei X die Anzahl defekter Kondensatoren am 1. Tag und Y die für den 2. Tag. Dann ist gesucht

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq 3) &= e^{-8} \sum_{k=0}^{3} \frac{8^k}{k!} \\ &= e^{-8}(1 + 8 + 32 + \frac{256}{3}) = e^{-8} \frac{379}{3} \\ &= 0.042 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Eine Firma F, welche Sand zu Glasschmelze weiterverarbeitet, hat 2 Kiesgruben zur Auswahl, bei der

sie den Sand bestellen kann. Der Verunreinigungsgrad sei bei Kiesgrube K_1 normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 0,58$ Prozent und Standardabweichung $0,013$ Prozent, während die Werte bei der Kiesgrube K_2 so lauten: $\mu = 0,56$ mit Standardabweichung $0,029$ Prozent. Die Bedingung der Firma F ist nun, dass der Verunreinigungsgrad nicht höher als $0,6$ Prozent sein darf.

Bei welcher Kiesgrube wird die Firma den Sand bestellen?

Lösung. Sei X_m die Verunreinigung des aus K_m stammenden Sandes, $m = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq 0.6) &= P(\frac{X_1 - 0.58}{0.013} \leq \frac{0.02}{0.013}) \\ &= \Phi(\frac{20}{13}) = 0.938 \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

die Fehlerfunktion.

Die entsprechende Rechnung für K_2 ergibt:

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq 0.6) &= P(\frac{X_2 - 0.56}{0.029} \leq \frac{0.04}{0.029}) \\ &= \Phi(\frac{40}{29}) = 0.9161 \end{aligned}$$

Damit verdient K_1 den Zuschlag.