Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **03.09.2008**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik III, Bachelor-Studiengang Maschinenbau

Aufgabe 1 (20 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2+3j & 1+j & 1+j \\ -18(1+j) & -9-10j & -9-12j \\ 12(1+j) & 6+8j & 6+10j \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren zu $\mathcal{A}$ sind.

b) Zeigen Sie, dass j ein Eigenwert von $\mathcal{A}$ ist.

c) Ist $\mathcal{A}$ diagonalisierbar? (Antwort begründen!)

Lösung. a) Es gilt $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2j \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$. Damit sind $2j$ und -1 Eigenwerte von $\mathcal{A}$

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \chi_{\mathcal{A}}(j) &= \det(j\mathcal{E}_3 - \mathcal{A}) \\ &= \begin{vmatrix} 2(1+j) & 1+j & 1+j \\ -18(1+j) & -9-11j & -9-12j \\ 12(1+j) & 6+8j & 6+9j \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2(1+j) & 1+j & 1+j \\ 0 & -2j & -3j \\ 0 & 2j & 3j \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

c) Da $\mathcal{A}$ drei verschiedene Eigenwerte hat, muss die Matrix diagonalisierbar sein.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $f(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} 8x_1 - 15x_1^2 x_2 + 7x_2 x_3^4 \\ -5x_1^3 + 8x_1 x_3^4 \\ 28x_1 x_2 x_3^3 \end{pmatrix}$.

a) Sei α die gerade Strecke von 0 nach $(1,1,1)$ und β der Weg, der durch Hintereinanderdurchlaufen der Strecke von 0 nach $(1,1,0)$ und von $(1,1,0)$ nach $(1,1,1)$ entsteht. Berechnen Sie $\int_\alpha \langle f, d\vec{s}(t)\rangle$ und $\int_\beta \langle f, d\vec{s}(t)\rangle$.

b) Hat f eine Stammfunktion?

Lösung. a) Es gilt $\langle f(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t)\rangle = 43t^5 - 20t^3 + 8t$, also

$$\int_\alpha \langle f, d\vec{s}(t)\rangle = \int_0^1 (43t^5 - 20t^3 + 8t)dt = \frac{37}{6}$$

und

$$\int_\beta \langle f, d\vec{s}(t)\rangle = \int_0^1 \langle f(t,t,0)\,,(1,1,0)\rangle dt + \int_0^1 \langle f(1,1,t)\,,(0,0,1)\rangle dt = \int_0^1 (-20t^3 + 8t)dt + \int_0^1 28t^3 dt = 6$$

b) Hätte f eine Stammfunktion U, so folgte $\int_\gamma \langle f, d\vec{s}(t)\rangle = U(1,1,1) - U(0)$ für jeden Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, der von 0 nach $(1,1,1)$ verläuft.

Stattdessen kommen aber, wie Teil a) gezeigt hat, bei der Berechnung des Wegintegrals $\int_\gamma \langle f, d\vec{s}(t)\rangle$ für $\gamma = \alpha$ und $\gamma = \beta$ unterschiedliche Ergebnisse heraus.

Es kann also für f keine Stammfunktion geben.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Der Angler Konrad hat ein Angelrevier, das aus 3 Seen besteht, die wir S_1, S_2 und S_3 nennen. Die Wahrscheinlichkeit p_i, dass er innerhalb einer Stunde in S_1, S_2 bzw. S_3 einen Fisch fängt, ist $p_1 = 0,24,\ p_2 = 0,51,\ p_3 = 0,25$. Konrad geht von zuhause fort ohne zu sagen, an welchen See er angeln geht. Man weiß, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit q_i zum See S_i geht, wobei $q_1 = 0,19\,,\ q_2 = 0,6\,,\ q_3 = 0,21$.

Nach einer Stunde ruft er zuhause an und meldet, er habe einen Fisch gefangen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er am See S_i geangelt, $i = 1,2,3$?

Lösung. Wir arbeiten mit 4 Ereignissen: $F = \{$ K. hat einen Fisch gefangen $\}$, sowie $A_i := \{$ K. angelt am See $S_i\}$, für $i = 1,2,3$. Gesucht ist die W'keit

$$P(A_i|F) = \frac{P(A_i \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|A_i)P(A_i)}{P(F)} = \frac{p_i q_i}{P(F)}.$$

Wir berechnen $P(F)$ mit der Bayes-Formel

$$P(F) = P(F|A_1)P(A_1) + P(F|A_2)P(A_2) + P(F|A_3)P(A_3) = \sum_{i=1}^{3} p_i q_i = 0,4041$$

So finden wir

$$P(A_i|F) = \frac{p_i q_i}{0,4041} = \begin{cases} 0.1128 & \text{wenn} \quad i = 1 \\ 0.7572 & \text{wenn} \quad i = 2 \\ 0,13 & \text{wenn} \quad i = 3 \end{cases} .$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Eine Firma benötigt Kondensatoren, deren Kapazität 110 μF betragen soll, wobei eine Toleranzspanne von $\pm 6\mu F$ zugelassen ist.

Man hat die Wahl zwischen 2 Anbietern, die wir A und B nennen. Bei A ist die Kapazität der gelieferten Kondensatoren $\mathcal{N}(108,4)$-verteilt und bei B nach $\mathcal{N}(109,3)$. Der Anbieter A nimmt 21 Euro für jeden Kondensator und B nimmt 24 Euro. Welcher Anbieter ist günstiger?

Lösung. Sei X_A die Kapazität der Kondensatoren aus Firma A, entsprechende Bedeutung hat X_B. Dann gilt für die Brauchbarkeitsquoten bei Firma A und B:

$$\begin{aligned} p_A := P(|X_A - 110| \le 6) = P(104 \le X_A \le 116) &= P(-1 \le \frac{X_A - 108}{4} \le 2) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 = 0.81 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} p_B := P(|X_B - 110| \le 6) = P(104 \le X_B \le 116) &= P(-\frac{5}{3} \le \frac{X_B - 109}{3} \le \frac{7}{3}) \\ &= \Phi(7/3) - \Phi(-5/3) = \Phi(7/3) + \Phi(5/3) - 1 = 0.94 \end{aligned}$$

Ein brauchbarer Kondensator kostet also bei Firma A: $\frac{21}{p_A} = 25,92$ EUR und bei B nur $\frac{24}{p_B} = 25,53$ EUR. Man wird sich daher für Firma B entscheiden.