Prof. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 12.03.2019

Mathematik für Sicherheitsingenieure II (MScS, MScQ)

Aufgabe 1. *(6+8+6 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(5-i)(3i+1) \quad , \quad \frac{5i-14}{4+i} \quad , \quad \left(e^{5\pi i}\right)^3$$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms $z^3 + 2z^2 + z + 2$.

c) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -8i,$$

d.h. finden Sie die 3-ten Wurzeln von $-8i$. Geben Sie diese in Polarkoordinaten an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
(5-i)(3i+1) &= 15i + 5 + 3 - i = 8 + 14i \\
\frac{5i-14}{4+i} &= (5i-14) \cdot \frac{\overline{4+i}}{|4+i|^2} = (5i-14) \cdot \frac{4-i}{4^2+1^2} \\
&= \frac{1}{17}(20i + 5 - 56 + 14i) = \frac{1}{17}(-51 + 34i) = -3 + 2i \\
\left(e^{5\pi i}\right)^3 &= (-1)^3 = -1
\end{aligned}$$

b) Wir erraten zunächst die Nullstelle -2. Polynomdivision liefert dann:

$$\left(z^3 + 2z^2 + z + 2\right) : (z+2) = z^2 + 1$$

Nun findet man entweder direkt $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$ durch die dritte binomische Formel, oder bestimmt mit der (p,q)-Formel die Nullstellen i und $-i$ von $z^2 + 1$:

$$z_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0}{4} - 1} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Somit ergibt sich die Linearfaktorzerlegung:

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 \quad = \quad (z+2)(z-i)(z+i)$$

c) Es gibt genau drei 3-te Wurzeln. Wegen $-8i = 8e^{3\pi i/2}$ sind dies $\sqrt[3]{8} \cdot e^{i\varphi}$ mit $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$ für $k = 0, 1, 2$. Also: $2e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \{\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$.

Aufgabe 2. *(12+3+5 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \cos^2(x)$.

a) Berechnen Sie durch Integration die komplexe Fourierreihe von f.

b) Geben Sie die reelle Fourierreihe von f an.

c) Verwenden Sie den Satz von Pythagoras, um aus Teil (a) die komplexe Fourierreihe der Funktion $\sin^2(x)$ abzuleiten.

Lösung:

a) f hat die Periode $T = \pi$ und damit die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 2$.
Wir dürfen über ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ der Länge π integrieren und erhalten mit partieller Integration unter Verwendung von

$$\cos(x) \cdot \cos(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)$$

die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_0^\pi f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(x)e^{-2ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi e^{2ix}e^{-2ikx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-2ikx}dx + \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi e^{-2ix}e^{-2ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi e^{2i(1-k)x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi e^{-2ikx}dx + \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi e^{-2i(1+k)x}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} \pi & ,k=1, \\ \left[\frac{e^{2i(1-k)x}}{2i(1-k)}\right]_0^\pi & ,k \neq 1 \end{array}\right\} + \frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{cc} \pi & ,k=0, \\ \left[\frac{e^{-2ikx}}{-2ik}\right]_0^\pi & ,k \neq 0 \end{array}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} \pi & ,k=-1, \\ \left[\frac{e^{2i(-1-k)x}}{2i(-1-k)}\right]_0^\pi & ,k \neq -1 \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} \pi & ,k=1, \\ 0 & ,k \neq 1 \end{array}\right\} + \frac{1}{2\pi}\left\{\begin{array}{cc} \pi & ,k=0, \\ 0 & ,k \neq 0 \end{array}\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} \pi & ,k=-1, \\ 0 & ,k \neq -1 \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Somit ist die komplexe Fourierreihe von f (wenig überraschend):

$$f \quad \sim \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)e^{ik\omega x} = \frac{1}{4}e^{-2ix} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2ix}$$

b) Da die Fourierkoeffizienten rein reell sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$f \quad \sim \quad c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} 2\mathrm{Re}\; c_k^*(f)\cos(k\omega x) - 2\mathrm{Im}\; c_k^*(f)\sin(k\omega x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Da f stetig ist, besteht sogar Gleichheit zwischen f und der Fourierreihe.
c) Nach dem Satz von Pythagoras ist:

$$\sin^2(x) \quad = \quad 1 - \cos^2(x) \quad = \quad -\frac{1}{4}e^{-2ix} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{2ix}$$

Aufgabe 3. *(10+10 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-3|x|}$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

b) Für welche Exponenten $a \geq 0$ ist die Funktion

$$g_a(x) = \frac{1}{(1+|x|)^a}$$

auf $\mathbb{R}$ absolut integrabel, für welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Mit partiellen Integrationen ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-iwx}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-3x}e^{-iwx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(3-iw)x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-3-iw)x}dx \\
&= \frac{1}{3-iw}\left[e^{(3-iw)x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{3+iw}\left[e^{(-3-iw)x}\right]_{0}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x\to-\infty}\left|e^{(3-iw)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{3x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left|e^{(-3-iw)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$$

folgt weiter

$$\ldots = \frac{1}{3-iw} + \frac{1}{3+iw} = \frac{3+iw+3-iw}{(3-iw)(3+iw)} = \frac{6}{9+w^2}.$$

b) Die Funktion g_a ist für $0 \leq a \leq 1$ nicht absolut integrabel, denn in diesem Fall ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^a} &\geq \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^a} \geq \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2x)^a} = \frac{1}{2^a}\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^a} \\
&\geq \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{1-a}\left[x^{1-a}\right]_1^{+\infty} & , \ 0 \leq a < 1 \\ \left[\ln(x)\right]_1^{+\infty} & , \ a = 1 \end{array}\right\} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{1-a}\left(x^{1-a}-1\right) & , \ 0 \leq a < 1 \\ \ln(x) & , \ a = 1 \end{array}\right\} = +\infty
\end{aligned}$$

Dabei haben wir $\lim_{x\to+\infty} x^{1-a} = +\infty$ für $0 \leq a < 1$ und $\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$ verwendet.

Die Funktion g_a ist für $a > 1$ absolut integrabel, denn aus Symmetriegründen ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} g_a(x)dx + \int_{-1}^{1} g_a(x)dx + \int_{1}^{+\infty} g_a(x)dx \\
&\leq \int_{-1}^{1}\frac{dx}{1} + 2\cdot\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^a} = 2 + \frac{2}{1-a}\left[x^{1-a}\right]_1^{+\infty} \\
&= 2 + \frac{2}{1-a}\left(\lim_{x\to+\infty} x^{1-a} - 1\right) = 2 + \frac{2}{a-1},
\end{aligned}$$

da der Grenzwert wegen $1-a<0$ verschwindet.

Aufgabe 4. *(6+4+10 Punkte)*

a) Berechnen Sie durch Integration die Laplacetransformierte der Funktion $h(t) = te^{3t}$ explizit, also $\big(\mathcal{L}h\big)(s)$. Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\big(\mathcal{L}h\big)(s)$?

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x^2}}{x}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$f''(t) - 4f(t) = 3e^{-t} - 4e^{2t} \quad , \quad f(0) = 0 \quad , \quad f'(0) = 2.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und machen Sie auch die Probe.

Lösung:

a) Durch partielle Integration berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}t\big)(s) &= \int_0^{+\infty} te^{3t}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} te^{(3-s)t} = \left[\frac{t}{3-s}e^{(3-s)t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{(3-s)t}}{3-s}dt \\
&= \left[\frac{t}{3-s}e^{(3-s)t} - \frac{1}{(3-s)^2}e^{(3-s)t}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(3-s)^2} - \frac{1}{(3-s)} \lim_{t\to+\infty} te^{(3-s)t} - \frac{1}{(3-s)^2} \lim_{t\to+\infty} e^{(3-s)t}.
\end{aligned}$$

Die Grenzwerte existieren und sind gleich 0 für Re $s > 3$. Dann ist $\big(\mathcal{L}t\big)(s) = \frac{1}{(3-s)^2}$.

b) Wegen $\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ gilt nach der Produktregel für Folgen:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} = 0.$$

Mit dem Satz von l'Hospital ist:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

c) Es sei $F(s) := \big(\mathcal{L}f\big)(s)$ die Laplacetransformierte von f. Damit ist dann:

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}f'\big)(s) &= sF(s) - f(0) = sF(s) \\
\big(\mathcal{L}f''\big)(s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - 2
\end{aligned}$$

Ausserdem ist $\big(\mathcal{L}(3e^{-t})\big)(s) = \frac{3}{s+1}$ und $\big(\mathcal{L}(4e^{2t})\big)(s) = \frac{4}{s-2}$. Damit transformiert die Differentialgleichung unter der Laplacetransformation zu:

$$
\begin{aligned}
s^2F(s) - 2 - 4F(s) &= \frac{3}{s+1} - \frac{4}{s-2} \\
\Leftrightarrow \quad \big(s^2-4\big)F(s) - 2 &= \frac{-s-10}{(s+1)(s-2)} \\
\Leftrightarrow \quad (s-2)(s+2)F(s) &= \frac{2s^2-3s-14}{(s+1)(s-2)} = \frac{(s+2)(2s-7)}{(s+1)(s-2)} \\
\Leftrightarrow \quad F(s) &= \frac{2s-7}{(s+1)(s-2)^2},
\end{aligned}
$$

wobei wir beachtet haben, dass -2 eine Nullstelle von $2s^2 - 3s - 14$ ist. Damit ist 2 eine doppelte Nullstelle des Nenners und -1 ist eine einfache Nullstelle. Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung

$$
F(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s+1}
$$

durch Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{aligned}
(s-2)(s+1)A + (s+1)B + (s-2)^2C &= 2s-7 \\
\Leftrightarrow (s^2-s-2)A + (s+1)B + (s^2-4s+4)C &= 2s-7 \\
\Leftrightarrow s^2(A+C) + s(-A+B-4C) + (-2A+B+4C) &= 2s-7,
\end{aligned}
$$

also $A + C = 0$, $-A + B - 4C = 2$ und $-2A + B + 4C = -7$. Durch Lösen dieses linearen Gleichungssystems berechnen wir $A = 1$, $B = -1$ und $C = -1$. Damit ist also

$$
F(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s+1}
$$

und die Rücktransformation ergibt:

$$
f(t) = e^{2t} - te^{2t} - e^{-t}
$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem (Nachrechnen!) zeigt, dass dies die korrekte Lösung ist.