Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal — Wuppertal, 13.03.2018

Mathematik für Sicherheitsingenieure II (MScS, MScQ)

Modulteil: Mathematik II

Aufgabe 1. *(6+7+7 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(3-2i)^2 \quad , \quad \frac{11i-3}{3-i} \quad , \quad e^{-i\pi/2}$$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms $z^3 - iz^2 + z - i$.

c) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -i,$$

d.h. finden Sie die 3-ten Wurzeln von $-i$. Geben Sie diese in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
(3-2i)^2 &= 9 - 12i + 4i^2 = 5 - 12i \\
\frac{11i-3}{3-i} &= (11i-3) \cdot \frac{\overline{3-i}}{|3-i|^2} = (11i-3) \cdot \frac{3+i}{3^2+(-1)^2} \\
&= \frac{1}{10}(33i - 11 - 9 - 3i) = \frac{1}{10}(-20+30i) = -2+3i \\
e^{-i\pi/2} &= \big(\cos(-\pi/2) + i \cdot \sin(-\pi/2)\big) = \big(\cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)\big) = -i
\end{aligned}$$

b) Wir erraten zunächst die Nullstelle i. Polynomdivision liefert dann:

$$(z^3 - iz^2 + z - i) : (z - i) = z^2 + 1$$

Nun findet man entweder direkt $z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$ durch die dritte binomische Formel, oder bestimmt mit der (p, q)-Formel die Nullstellen i und $-i$ von $z^2 + 1$:

$$z_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0}{4} - 1} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Somit ergibt sich die Linearfaktorzerlegung:

$$z^3 - iz^2 + z - 1 \quad = \quad (z-i)(z-i)(z+i)$$

c) Es gibt genau drei 3-te Wurzeln. Wegen $-i = e^{i3\pi/2}$ sind dies $e^{i\varphi}$ mit $\varphi = \pi/2 + k\frac{2\pi}{3}$ für $k = 0, 1, 2$. Also: $e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \{\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$.

Aufgabe 2. *(11+3+2+4 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion $f(x) = \cos(x)$.

a) Berechnen Sie durch Integration die komplexe Fourierreihe von f.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

c) Kann die komplexe Fourierreihe der Ableitung f' mit dem Differentiationssatz bestimmt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Leiten Sie aus Teil (a) die komplexe Fourierreihe von $\cos(x+\pi)$ ab.

Lösung:

a) f hat die Periode $T = 2\pi$ und damit die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 1$. Wir dürfen über ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ der Länge 2π integrieren und erhalten mit partieller Integration unter Verwendung von $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ die Fourierkoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix}e^{-ikx}dx + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ix}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(1-k)x}dx + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(1+k)x}dx \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=1, \\ \left[\frac{e^{i(1-k)x}}{i(1-k)}\right]_0^{2\pi} & ,k \neq 1 \end{array}\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=-1, \\ \left[\frac{e^{i(-1-k)x}}{i(-1-k)}\right]_0^{2\pi} & ,k \neq -1 \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=1, \\ 0 & ,k\neq 1 \end{array}\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=-1, \\ 0 & ,k\neq -1 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} 1/2 & ,k=-1, \\ 1/2 & ,k=1, \\ 0 & ,k\notin\{-1,1\} \end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

Somit ist die komplexe Fourierreihe von f (wenig überraschend):

$$f \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)e^{ik\omega t} = \frac{1}{2}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{ix}.$$

b) Da die Fourierkoeffizienten rein reell sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$f \sim c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} 2\mathrm{Re}\ c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\ c_k^*(f)\sin(k\omega t) = \cos(x)$$

c) Die komplexe Fourierreihe von f' kann mit dem Differentiationssatz bestimmt werden, da f differenzierbar ist.

d) Nach der Translationsformel (oder einfach einsetzen) gilt:

$$\cos(x+\pi) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)e^{i\pi\omega k}e^{ik\omega t} = \frac{1}{2}e^{-i\pi}e^{-ix} + \frac{1}{2}e^{i\pi}e^{ix} = -\frac{1}{2}e^{-ix} - \frac{1}{2}e^{ix},$$

also $\cos(x+\pi) \sim -\cos(x)$.

Aufgabe 3. *(12+3+5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformation von $f(x) = |x|e^{-|x|}$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

b) Die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-|x|}$ ist die Funktion $\widehat{f}(w) = \frac{2}{1+w^2}$. Verwenden Sie den Umkehrsatz der Fouriertransformation, um f unter Verwendung von $\hat{f}$ darzustellen.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(w) = \frac{1}{1+(|w|+|\sin|(w))^4}$ auf $\mathbb{R}$ absolut integrabel ist.

Lösung:

a) Mit partiellen Integrationen ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = -\int_{-\infty}^{0} xe^{x}e^{-iwx}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}e^{-iwx}dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} xe^{(1-iw)x}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{(-1-iw)x}dx \\
&= \frac{-1}{1-iw}\left[xe^{(1-iw)x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{1-iw}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-iw)x}dx \\
&\quad -\frac{1}{1+iw}\left[xe^{(-1-iw)x}\right]_{0}^{+\infty} + \frac{1}{1+iw}\int_{0}^{+\infty} e^{(-1-iw)x}dx \\
&= \frac{1}{1-iw}\left[\frac{e^{(1-iw)x}}{1-iw} - xe^{(1-iw)x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{1+iw}\left[\frac{-e^{(-1-iw)x}}{1+iw} - xe^{(-1-iw)x}\right]_{0}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x\to-\infty}\left|e^{(1-iw)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left|e^{(-1-iw)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

und

$$\lim_{x\to-\infty}\left|xe^{(1-iw)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} -xe^{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left|xe^{(-1-iw)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

folgt weiter

$$... = \frac{1}{(1-iw)^2} + \frac{1}{(1+iw)^2} = \frac{1+2iw-w^2+1-2iw-w^2}{(1-iw)^2(1+iw)^2} = \frac{2-2w^2}{(1+w^2)^2}.$$

b) Nach dem Umkehrsatz ist

$$e^{-|x|} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(w)e^{iwx}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+w^2}e^{iwx}dw$$

c) Wegen $0 \le g(w) \le 1/(1+w^4)$ reicht es zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dw}{1+w^4} &= \int_{-\infty}^{-1}\frac{dw}{1+w^4} + \int_{-1}^{1}\frac{dw}{1+w^4} + \int_{1}^{+\infty}\frac{dw}{1+w^4} \\
&\le \int_{-\infty}^{-1}\frac{dw}{w^4} + \int_{-1}^{1}dw + \int_{1}^{+\infty}\frac{dw}{w^4} = \left[-\frac{w^{-3}}{3}\right]_{-\infty}^{-1} + 2 + \left[-\frac{w^{-3}}{3}\right]_{1}^{+\infty} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. *(4+3+13 Punkte)*

a) Berechnen Sie durch Integration die Laplacetransformierte der Funktion e^{-2t} explizit, also $\big(\mathcal{L}e^{-2t}\big)(s)$. Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\big(\mathcal{L}e^{-2t}\big)(s)$?

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = -3 \quad , \quad f(0) = -2 \quad , \quad f'(0) = 1.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und machen Sie auch die Probe.

Lösung:

a) Die gesuchte Laplacetransformation

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}e^{-2t}\big)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{(-2-s)t}dt = \Big[\frac{e^{(-2-s)t}}{-2-s}\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{-1}{2+s}\lim_{t\to+\infty} e^{(-2-s)t} + \frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

existiert für $s \in \mathbb{C}$ mit Re $s > -2$. Für solche s ist $\big(\mathcal{L}e^{-2t}\big)(s) = \frac{1}{s+2}$.

b) Wegen $\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ gilt nach der Produktregel für Folgen:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2} = 0.$$

Mit dem Satz von l'Hospital ist:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3e^{-3x}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9e^{-3x}}{2} = \frac{9}{2}\lim_{x\to-\infty} e^{-3x} = +\infty.$$

c) Es sei $F(s) := \big(\mathcal{L}f\big)(s)$ die Laplacetransformierte von f. Damit ist dann:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}f'\big)(s) &= sF(s) - f(0) = sF(s) + 2 \\ \big(\mathcal{L}f''\big)(s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) + 2s - 1\end{aligned}$$

Ausserdem ist $\big(\mathcal{L}(-3)\big)(s) = -\frac{3}{s}$. Damit transformiert die Differentialgleichung unter der Laplacetransformation zu:

$$\begin{aligned}s^2F(s) + 2s - 1 + 2sF(s) + 4 + F(s) &= -\frac{3}{s} \\ \Leftrightarrow \quad \big(s^2 + 2s + 1\big)F(s) + 2s + 3 &= -\frac{3}{s} \\ \Leftrightarrow \quad \big(s+1\big)^2F(s) &= -\frac{2s^2+3s+3}{s} \\ \Leftrightarrow \quad F(s) &= -\frac{2s^2+3s+3}{s(s+1)^2}\end{aligned}$$

Damit ist -1 eine doppelte Nullstelle des Nenners und 0 ist eine einfache Nullstelle. Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s}$$

durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} s(s+1)A + sB + (s+1)^2 C &= -2s^2 - 3s - 3 \\ \Leftrightarrow (s^2+s)A + sB + (s^2+2s+1)C &= -2s^2 - 3s - 3 \\ \Leftrightarrow s^2(A+C) + s(A+B+2C) + C &= -2s^2 - 3s - 3, \end{aligned}$$

also $A + C = -2$, $A + B + 2C = -3$ und $C = -3$. Hieraus berechnen wir $C = -3$, $A = 1$ und $B = 2$. Damit ist also

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{3}{s}$$

und die Rücktransformation ergibt:

$$f(t) = e^{-t} + 2te^{-t} - 3$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem (Nachrechnen!) zeigt, dass dies die korrekte Lösung ist.