Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 21.03.2017

Mathematik für Sicherheitsingenieure II (MScS, MScQ)

Modulteil: Mathematik II

Aufgabe 1. *(8+6+6 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(1+4i)\cdot(2-3i) \quad , \quad \frac{6+6i}{2-2i} \quad , \quad 2e^{i\pi/4}$$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms $z^2 + 5iz - 4$.

c) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -i,$$

d.h. finden Sie die 3-ten Wurzeln von $-i$. Wieviele verschiedene gibt es? Geben Sie diese in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
(1+4i)\cdot(2-3i) &= 2-3i+8i-12i^2 = 2+5i+12 = 14+5i \\
\frac{6+6i}{2-2i} &= (6+6i)\cdot\frac{\overline{2-2i}}{|2-2i|^2} = (6+6i)\cdot\frac{2+2i}{2^2+2^2} \\
&= \frac{3}{8}(2+2i)^2 = \frac{3}{8}(4+8i+4i^2) = \frac{3}{8}8i = 3i \\
2e^{i\pi/4} &= 2\big(cos(\pi/4) + i\cdot\sin(\pi/4)\big) = 2\big(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}\big) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}
\end{aligned}$$

b) Mit der (p, q)-Formel sind $-i$ und $-4i$ die Nullstellen des Polynoms:

$$z_{1,2} = -\frac{5i}{2} \pm \sqrt{\frac{25i^2}{4}+4} = -\frac{5}{2}i \pm \sqrt{\frac{16-25}{4}} = -\frac{5}{2}i \pm i\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{5}{2}i \pm \frac{3}{2}i$$

Somit ergibt sich die Linearfaktorzerlegung:

$$z^2 + 5iz - 4 \quad = \quad (z+i)(z+4i)$$

c) Es gibt genau drei 3-te Wurzeln. Wegen $-i = e^{i3\pi/2}$ sind dies $e^{i\varphi}$ mit $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}$ für $k = 0, 1, 2$. Also: $e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \{\frac{1}{2}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\}$.

Aufgabe 2. *(10+3+3+4 Punkte)*

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung von $f_0:[-1,1)\to\mathbb{R}$, $f_0(x)=2x-2$.

a) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von f.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

c) Kann die komplexe Fourierreihe der Ableitung f' mit dem Differentiationssatz bestimmt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Verwenden Sie partielle Integration zur Berechnung von: $\int_0^{2\pi} x\sin(x)dx$.

Lösung:

a) f hat die Periode $T=2$ und damit die Kreisfrequenz $\omega=2\pi/T=\pi$.
Wir dürfen über ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ der Länge 2 integrieren und erhalten mit partieller Integration die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2x-2)e^{-ik\pi x}dx \\
&= = \int_{-1}^{1} xe^{-ik\pi x}dx - \int_{-1}^{1} e^{-ik\pi x}dx \\
&= \frac{1}{-ik\pi}\left[xe^{-ik\pi x} - \frac{1}{-ik\pi}e^{-ik\pi x}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{-ik\pi}\left[e^{-ik\pi x}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{i}{k\pi}\left(e^{-ik\pi} - \frac{i}{k\pi}e^{-ik\pi} + e^{ik\pi} + \frac{i}{k\pi}e^{ik\pi}\right) - \frac{i}{k\pi}\left(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}\right) \\
&= \frac{i}{k\pi}\left((-1)^k - \frac{i}{k\pi}(-1)^k + (-1)^k + \frac{i}{k\pi}(-1)^k\right) - \frac{i}{k\pi}\left((-1)^k - (-1)^k\right) \\
&= \frac{2i}{k\pi}(-1)^k
\end{aligned}$$

für $k\neq 0$, und

$$c_0^*(f) = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2x-2)dx = \int_{-1}^{1} xdx - \int_{-1}^{1} dx = 0-2=-2$$

Somit ist die komplexe Fourierreihe von f:

$$f \sim c_0^*(f) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} c_k^*(f)e^{ik\omega t} = -2 + \frac{2i}{\pi}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{(-1)^k}{k}e^{ik\pi t}$$

b) Da die Fourierkoeffizienten für $k\neq 0$ rein imaginär sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
f &\sim c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} 2\mathrm{Re}\ c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\ c_k^*(f)\sin(k\omega t) \\
&= -2 - \frac{4}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k}\sin(\pi k t)
\end{aligned}$$

c) Die komplexe Fourierreihe von f' kann nicht mit dem Differentiationssatz bestimmt werden, da f nicht stetig ist.

d) Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} x\sin(x)dx &= -\big[x\cos(x)\big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos(x)dx \\ &= -\big(2\pi\cos(2\pi) - 0\big) + [\sin(x)]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi + \big(\sin(2\pi) - \sin(0)\big) = -2\pi\end{aligned}$$

Aufgabe 3. *(12+5+3 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformation von $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \sin(x) \cdot e^{-|x|}$ auf $\mathbb{R}$ absolut integrabel ist.

c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ nicht existiert.

Lösung:

a) Mit partiellen Integrationen ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{x}e^{-iwx}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-x}e^{-iwx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} xe^{(1-iw)x}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{(-1-iw)x}dx \\
&= \frac{1}{1-iw}\left[xe^{(1-iw)x} - \frac{e^{(1-iw)x}}{1-iw}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{1+iw}\left[xe^{(-1-iw)x} + \frac{e^{(-1-iw)x}}{1+iw}\right]_{0}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x\to-\infty}\left|e^{(1-iw)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left|e^{(-1-iw)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

und (nach dem Satz von l'Hospital)

$$\lim_{x\to-\infty}\left|xe^{(1-iw)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} -xe^{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left|xe^{(-1-iw)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

folgt weiter

$$= \frac{-1}{(1-iw)^2} + \frac{1}{(1+iw)^2} = \frac{-1-2iw+w^2+1-2iw-w^2}{(1-iw)^2(1+iw)^2} = \frac{-4iw}{(1+w^2)^2}.$$

b) Wegen $|\sin(x)| \leq 1$ und $|e^{-|x|}| = e^{-|x|}$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\sin(x)e^{-|x|}\right| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx \\
&= \left[e^{x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} = 1 - \lim_{x\to-\infty} e^{x} - \lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 1 = 2 < \infty.
\end{aligned}$$

c) Das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \left[\ln(x)\right]_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) - 0$$

existiert nicht, da $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ ist.

Aufgabe 4. *(20 Punkte)*

Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$f'(t) - 4f(t) = 4t - 9 \quad , \quad f(0) = 3.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung:

Es sei $F(s) := \big(\mathcal{L}f\big)(s)$ die Laplacetransformierte von f. Damit ist dann:

$$\big(\mathcal{L}f'\big)(s) \quad = \quad sF(s) - f(0)$$

also

$$\big(\mathcal{L}f'\big)(s) \quad = \quad sF(s) - 3,$$

Ausserdem ist $\big(\mathcal{L}9\big)(s) = \frac{9}{s}$ und $\big(\mathcal{L}(4t)\big)(s) = \frac{4}{s^2}$.

Damit transformiert die Differentialgleichung unter der Laplacetransformation zu:

$$\begin{aligned} sF(s) - 3 - 4F(s) &= -\frac{9}{s} + \frac{4}{s^2} \quad \Leftrightarrow \quad (s-4)F(s) - 3 = -\frac{9}{s} + \frac{4}{s^2} \\ \Leftrightarrow \quad (s-4)F(s) &= -\frac{9}{s} + \frac{4}{s^2} + 3 \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{3s^2 - 9s + 4}{s^2(s-4)} \end{aligned}$$

Damit ist 0 eine doppelte Nullstelle des Nenners und 4 ist eine einfache Nullstelle. Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung

$$F(s) \quad = \quad \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-4}$$

durch Hilfssatz 4.3.5:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \to 0} \big(s^2 F(s)\big)' = \lim_{s \to 0} \left(\frac{3s^2 - 9s + 4}{s-4}\right)' \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{(s-4)(6s-9) - (3s^2 - 9s + 4)}{(s-4)^2} = \frac{(-4)(-9) - 4}{(-4)^2} = 2 \\ B &= \lim_{s \to 0} s^2 F(s) = \frac{4}{-4} = -1 \\ C &= \lim_{s \to 4} (s-4)F(s) = \frac{3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 4}{4^2} = \frac{12 - 9 + 1}{4} = 1 \end{aligned}$$

Damit ist also

$$F(s) \quad = \quad \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-4}$$

und

$$f(t) \quad = \quad 2 - t + e^{4t}$$