Prof. Dr. Althaus, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **15.3.2016**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScQ, MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Lösen Sie die Gleichung $w^2 = \frac{5}{2}j - 6$ (7 Punkte)

b) Was sind die Lösungen der Gleichung $z^2 + (1-j)z + 6 = 3j$? (9 Punkte)

c) Gesucht ist ein trigonometrisches Polynom der Form $p(t) = A\cos(2t) + B\sin(3t)$, so dass

$$p(\frac{\pi}{2}) = 1,\ p(\frac{\pi}{6}) = -2.$$

Wie müssen A und B gewählt werden? (4 Punkte)

Lösung . a) Ist $v = t+js$ mit $s \neq 0$, so ist eine der Quadratwurzeln aus v gegeben durch $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|v|+t} + j\varepsilon\sqrt{|v|-t})$, wobei ε das Vorzeichen von s bedeutet. Hier ist nun $v = \frac{5}{2}j - 6$, also $|v| = \frac{13}{2}$, $t = -6, s = \frac{5}{2}$. Somit wird $w_1 = \frac{1+5j}{2}$. Die andere Quadratwurzel ist $-w_1$.

b) Die quadratische Gleichung ist äquivalent zu $(z + \frac{1-j}{2})^2 = \frac{5}{2}j - 6 = w_1^2$, somit sind die Lösungen:

$$z_1 = -\frac{1-j}{2} + w_1 = 3j, \qquad z_2 = -\frac{1-j}{2} - w_1 = -1-2j$$

c) Die Bedingungen an die Werte von p sind zu dem linearen Gleichungssystem

$$-A - B = 1, \qquad \frac{A}{2} + B = -2$$

äquivalent. Es folgt $A = 2, B = -3$, also

$$p(t) = 2\cos(2t) - 3\sin(3t)$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $x(t) := t\sin(t)$ auf $[-\pi, \pi]$ und x werde (2π)-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie den Graphen von x auf $[-\pi, 2\pi]$

(5 Pkte)

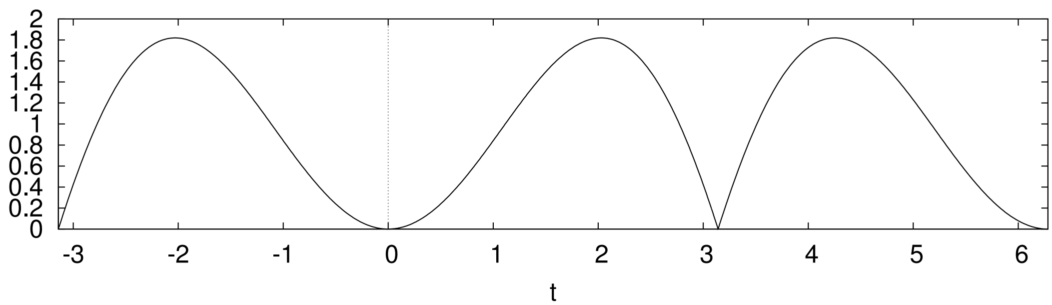
b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von $x(t)$

(10 Pkte)

c) Konvergiert diese Reihe punktweise gegen $x(t)$? (Antwort begründen)

(5 Pkte)

Lösung . a) Hier ist die Skizze:



b) Da x gerade ist, haben wir

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

mit

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(t)\cos(kt)dt$$

Es gilt aber $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin t dt = \frac{2}{\pi}\left(\sin t - t\cos t\Big|_0^{\pi}\right) = 2$ und

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin t\cos t dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(2t)dt = \frac{1}{4\pi}\left(\sin(2t) - 2t\cos(2t)\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}$$

Für $k \geq 2$ beachten wir, dass

$$2\sin t\,\cos(kt) = \sin((k+1)t) - \sin((k-1)t)$$

und weiter

$$\int t\sin((k+1)t)\,dt = \frac{\sin((k+1)t)}{(k+1)^2} - t\frac{\cos((k+1)t)}{k+1}$$
$$\int t\sin((k-1)t)\,dt = \frac{\sin((k-1)t)}{(k-1)^2} - t\frac{\cos((k-1)t)}{k-1}$$

Das ergibt

$$a_k = \frac{\cos((k-1)\pi)}{k-1} - \frac{\cos((k+1)\pi)}{k+1} = 2\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-1}$$

und damit

$$x(t) \sim 1 - \frac{1}{2}\cos t + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-1}\cos(kt)$$

c) Die Fourierreihe von x konvergiert punktweise gegen x, da x überall stetig ist und überall die rechts-und linksseitigen Ableitungen existieren.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$.

a) Sei $f_1(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$. Zeigen Sie dann, dass $f_1' = -2x\,f$

b) Zeigen Sie mit den Differenziationssätzen, dass $\widehat{f}\,'(\omega) = -\dfrac{\omega}{2}\widehat{f}_1(\omega)$

c) Berechnen Sie $\widehat{f}_1$. Dazu benutzen Sie, dass $x \longmapsto e^{-|x|}$ die Fouriertransformierte $\dfrac{2}{1+\omega^2}$ hat und wenden die Umkehrformel an. Zur Orientierung: $\widehat{f}_1(\omega) = Ce^{-|\omega|}$ mit einer Konstanten C.

d) Berechnen Sie damit $\widehat{f}$.

(1+8 + 6 + 5 Punkte)

Lösung. a) Klar nach der Quotientenregel: $f_1'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = -2xf(x)$.

b) Es gilt mit den Differenziationssätzen

$$\widehat{f}\,' = -j\,\widehat{xf}$$

und

$$\widehat{f_1'}(\omega) = j\omega\widehat{f}_1(\omega)$$

Kombinieren wir das mit a) , also $\widehat{xf} = -\dfrac{1}{2}\widehat{f_1'}$, folgt

$$\widehat{f}\,'(\omega) = -j\widehat{xf}(\omega) = \frac{j}{2}\widehat{f_1'}(\omega) = \frac{j^2}{2}\omega\widehat{f}_1 = -\frac{1}{2}\omega\widehat{f}_1$$

c) Sei $g(x) := e^{-|x|}$. Dann ist $\widehat{g}(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2} = 2f_1(\omega)$, also mit der Umkehrformel für $\widehat{g}$:

$$\widehat{f}_1(\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{g}(\eta)e^{j\eta\omega}d\eta = \pi g(-\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

d) Es gilt nun mit b)

$$\widehat{f}\,'(\omega) = -\frac{\pi}{2}\omega e^{-|\omega|}$$

Auf $\mathbb{R}^+$ folgt durch Integration $\widehat{f}(\omega) = \dfrac{\pi}{2}(\omega+1)e^{-\omega} + C$ und auf $\mathbb{R}^-$ ist $\widehat{f}(\omega) = \dfrac{\pi}{2}(1-\omega)e^{\omega} + C$. Zusammen ergibt das

$$\widehat{f}(\omega) = C + \frac{\pi}{2}(|\omega|+1)e^{-|\omega|}$$

und $C = \widehat{f}(0) - \dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} - \frac{\pi}{2} = 0$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Gegeben sei das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -11y_1 - 18y_2 + 1 \\ y_2' &= 6y_1 + 10y_2 \end{aligned}$$

mit der Startbedingung $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

a) Welches lineare Gleichungssystem müssen die Laplacetransformierten Y_1 zu y_1 und Y_2 zu y_2 lösen?

b) Berechnen Sie Y_1 und Y_2.

c) Berechnen Sie daraus die Lösungen y_1 und y_2.

Lösung. a) Sei $Y_k(s)$ die Laplacetransformierte zu $y_k(t)$, für $k = 1, 2$. Dann gilt

$$sY_1(s) = -11Y_1(s) - 18Y_2(s) + \frac{1}{s}$$

$$sY_2(s) = 6Y_1(s) + 10Y_2(s)$$

Das bedeutet

$$(s+11)Y_1(s) + 18Y_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$-6Y_1(s) + (s-10)Y_2(s) = 0$$

b) Mit der Cramerschen Regel folgt

$$\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{s((s+11)(s-10)+108)} \begin{pmatrix} s-10 & -18 \\ 6 & s+11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s(s^2+s-2)} \begin{pmatrix} s-10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aus $s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2)$ folgt jetzt

$$Y_1(s) = \frac{s-10}{s(s-1)(s+2)}, \qquad Y_2(s) = \frac{6}{s(s-1)(s+2)}$$

c) Wir machen einen Partialbruchansatz für beide Funktionen.

$$Y_k(s) = \frac{A_k}{s} + \frac{B_k}{s-1} + \frac{C_k}{s+2}, \qquad k = 1, 2$$

Wir finden

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{s\to 0} sY_1(s) = 5, & A_2 &= \lim_{s\to 0} sY_2(s) = -3 \\ B_1 &= \lim_{s\to 1} (s-1)Y_1(s) = 3, & B_2 &= \lim_{s\to 1} (s-1)Y_2(s) = 2 \\ C_1 &= \lim_{s\to -2} (s+2)Y_1(s) = -2, & C_2 &= \lim_{s\to 2} (s+2)Y_2(s) = 1 \end{aligned}$$

und damit

$$Y_1(s) = \frac{5}{s} - \frac{3}{s-1} - \frac{2}{s+2}, \qquad Y_2(s) = -\frac{3}{s} + \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}$$

Nun müssen wir nur noch rücktransformieren und erhalten

$$y_1(t) = 5 - 3e^t - 2e^{-2t}, \qquad y_2(t) = -3 + 2e^t + e^{-2t}$$