Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **24.3.2015**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScQ, MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^5 - 5z^3 - 36z = 0.$$

b) Gegeben sei das trigonometrische Polynom zweiten Grades

$$p(t) = A + B\cos(t) + C\sin(t) - \cos(2t)\,.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten A, B und C so, dass

$$p(0) = p\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ und } p\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

erfüllt ist.
Geben Sie $p(t)$ in der Form

$$p(t) = c_0 + c_1 e^{jt} + c_{-1}e^{-jt} + c_2 e^{2jt} + c_{-2}e^{-2jt}$$

mit geeigneten Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ an. Dabei sollen die Koeffizienten in der kartesischen Form, d. h. in der Form $a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmt werden.

c) Gegeben sei die Funktion $g(t) = t$ für $t \in [0, \pi]$. Skizzieren Sie jeweils die gerade und die ungerade Fortsetzung von $g(t)$ im Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

Lösung . a) Neben $z_1 = 0$ sind auch alle z mit $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$ Lösungen. Da $z^4 - 5z^2 - 36 = (z^2 - \frac{5}{2})^2 - (\frac{13}{2})^2 = (z^2 - 9)(z^2 + 4)$, sind auch $z_{2,3} = \pm 3$ und $z_{4,5} = \pm 2j$ Lösungen.

b) Es ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B - 1 &= p(0) &&= 1 \\ A - C + 1 &= p(-\pi/2) &&= 1 \\ A + C + 1 &= p(\pi/2) &&= -1 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir erhalten $A = C = -1$, $B = 3$. Also ist

$$p = -1 + 3\cos t - \cos(2t) - \sin t = -1 + \frac{3+j}{2}e^{jt} + \frac{3-j}{2}e^{-jt} - \frac{1}{2}e^{2jt} - \frac{1}{2}e^{-2jt}$$

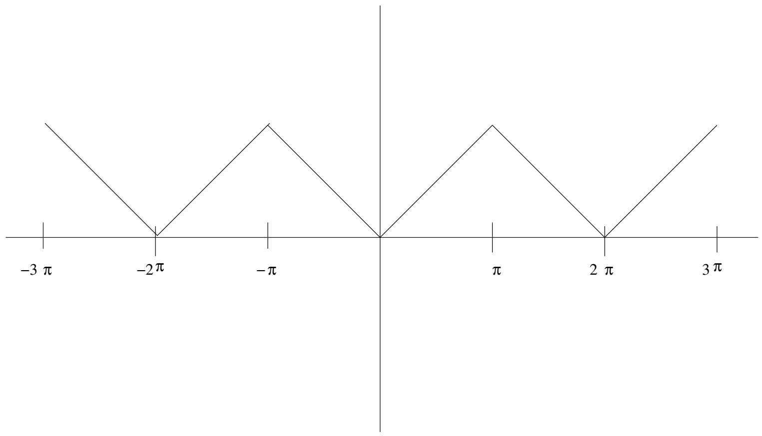
das gesuchte trigonometrische Polynom.

c) Die gerade (periodische) Fortsetzung von g ist $G_1(t) := |t - 2k\pi|$, wenn $2k\pi - \pi \le t < 2k\pi + \pi$.

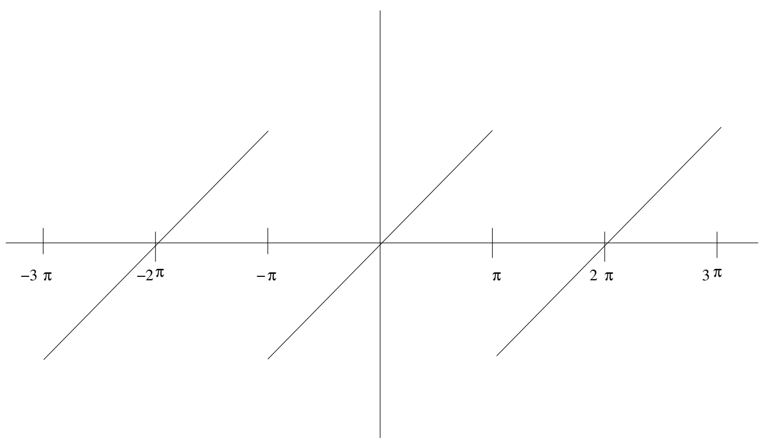
Die ungerade Fortsetzung von g ist $G_2(t) = t - 2k\pi$, wenn $2k\pi - \pi \le t < 2k\pi + \pi$.

Hier sind die Skizzen:

Für G_1:



und für G_2:



Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$x(t) = e^{|t|}, \quad t \in (-\pi, \pi].$$

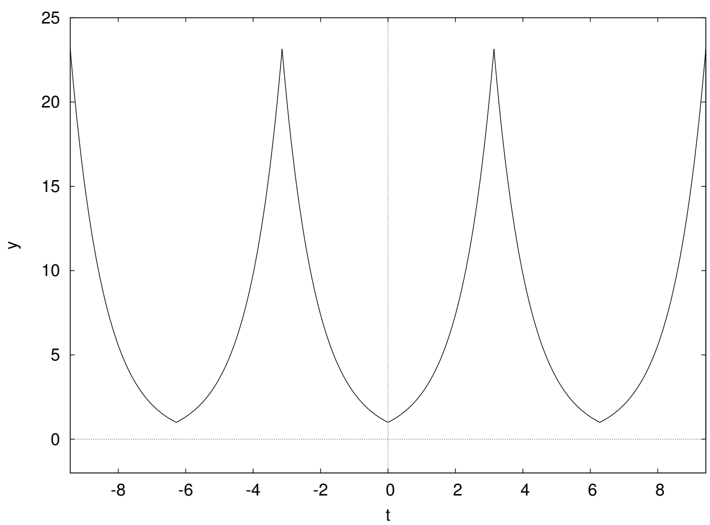
$x(t)$ werde 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von $x(t)$. Berechnen Sie dazu die Koeffizienten der Fourierreihe von $x(t)$ in komplexer Form. Fassen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich zusammen. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.
(Zur Kontrolle: $c_n = \dfrac{(-1)^n \cdot e^\pi}{\pi(1+n^2)}$)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Koeffinienten c_n die reelle Darstellung der Fourierreihe von $x(t)$.

Lösung. Zu a) Hier ist der Funktionsgraph von $x(t)$.



Zu b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{|t|-jnt} dt = \int_0^{\pi} e^{(1-jn)t} dt + \int_{-\pi}^{0} e^{-(1+jn)t} dt \\
&= \frac{1}{1-jn}(e^{(1-jn)\pi} - 1) - \frac{1}{1+jn}(1 - e^{(1+jn)\pi}) \\
&= \frac{1}{1-jn}((-1)^n e^\pi - 1) - \frac{1}{1+jn}(1 - (-1)^n e^\pi) \\
&= \left(\frac{1}{1-jn} + \frac{1}{1+jn}\right)((-1)^n e^\pi - 1) = \frac{2((-1)^n e^\pi - 1)}{1+n^2}
\end{aligned}$$

also $c_n = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und damit

$$x \approx \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1+n^2} \cos(nt)$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

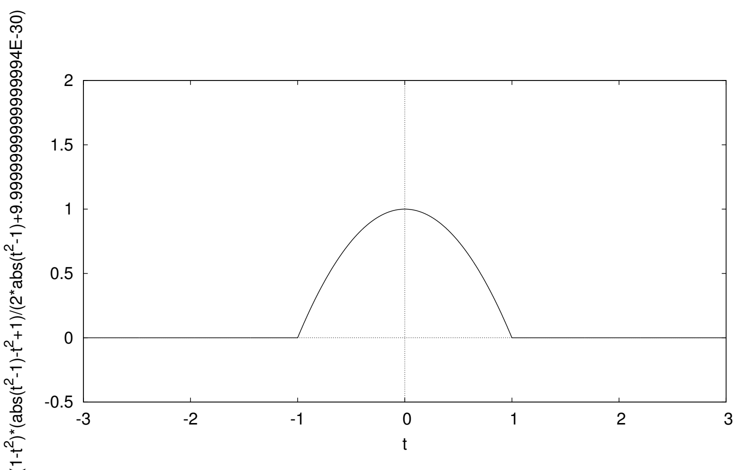
$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{für } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $x(t)$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und beachten Sie die nötigen Fallunterscheidungen.
(Zur Kontrolle: Für $\omega \neq 0$ gilt $X(\omega) = \dfrac{4}{\omega^2}\left\{\dfrac{1}{\omega}\sin\omega - \cos\omega\right\}$)

c) Skizzieren Sie die Funktionen $x_1(t) = x(t+2)$ und $x_2(t) = x\,(2t)$ und bestimmen Sie aus dem Ergebnis zu b) mit Hilfe geeigneter Korrespondenzen und Rechenregeln die Fouriertransformierten von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

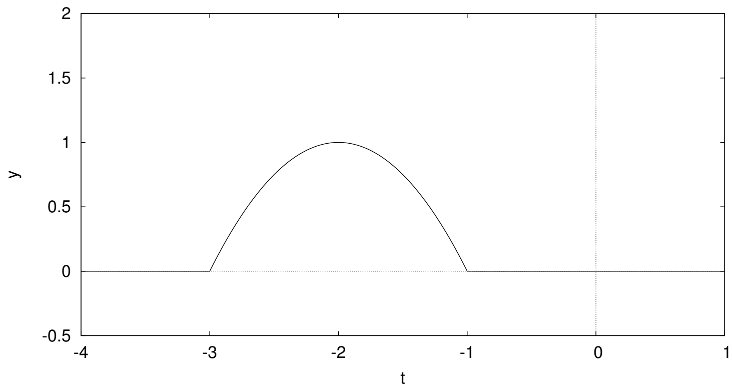
Lösung . a) Der Graph der Funktion x sieht so aus:



b) Es gilt $X(0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)dt = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Für $\omega \neq 0$ haben wir

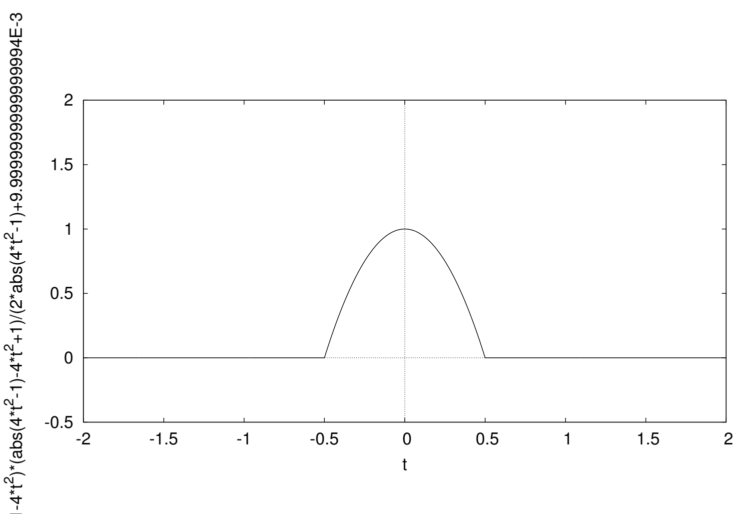
$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-1}^{1} (1-t^2)e^{-j\omega t}dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\cos(\omega t)dt \\
&= 2\int_{0}^{1} (1-t^2)\cos(\omega t)dt = \frac{2}{\omega}(1-t^2)\sin(\omega t)\Big|_0^1 \frac{4}{\omega}\int_0^1 t\sin(\omega t)dt \\
&= -\frac{4}{\omega^2}\cos(\omega t)\Big|_0^1 + \frac{4}{\omega^2}\int_0^1 \cos(\omega t)dt \\
&= -\frac{4}{\omega^2}\cos(\omega) + \frac{4}{\omega^3}\sin\omega t
\end{aligned}$$

Zu c) Der Graph von x_1 ist:



Es folgt $X_1(\omega) = e^{2j\omega} X(\omega)$.

Der Graph von x_2 ist:



Es folgt $X_2(\omega) = \frac{1}{2} X(\frac{\omega}{2})$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = t + 1\,, \quad x(0) = 1\,, \quad x'(0) = 3.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung. Sei $x_0(t) := t + 1$ und X_0 die Laplacetransformierte von x_0. Die Laplacetransformierte $X(s)$ von $x(t)$ löst wegen

$$\mathcal{L}(x') = sX(s) - 1, \qquad \mathcal{L}(x'') = s^2X(s) - s - 3$$

die Gleichung

$$s^2X(s) - s - 3 - 2sX(s) + 2 - 3X(s) = X_0(s)$$

also wegen $X_0(s) = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s}$

$$X(s) = \frac{s + 1 + X_0}{s^2 - 2s - 3} = \frac{s^2(s+1) + s + 1}{s^2(s-3)(s+1)}$$

Nun ist aber

$$\frac{s^2(s+1) + s + 1}{s^2(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s+1}$$

Wir finden

$$D = \lim_{s\to -1}(s+1)X(s) = 0, \quad C = \lim_{s\to 3}(s-3)X(s) = \frac{10}{9}$$

$$B = \lim_{s\to 0} s^2X(s) = -\frac{1}{3}, \qquad A = X(1) - B + \frac{1}{2}C = -1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = -\frac{1}{9}$$

was auf

$$x(t) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}t + \frac{10}{9}e^{3t}$$

führt.