**Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort** **19.3.2014**
**Bergische Universität Wuppertal**

# Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

**Aufgabe 1** (20 Punkte)
a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$w^3 = 27e^{j\frac{\pi}{2}}$$

und geben Sie die Lösungen in kartesischer Form an. Skizzieren Sie die Lösungen in der komplexen Ebene.

b) Gegeben sei das trigonometrische Polynom dritten Grades $p(t) = Ae^{jt} + Be^{-2jt} + Ce^{3jt}$ Bestimmen Sie die Koeffizienten $A, B$ und $C$ so, dass

$$p(\pi) = -4, \qquad p'(\frac{\pi}{2}) = 1 - 2j, \qquad p''(\pi) = 15$$

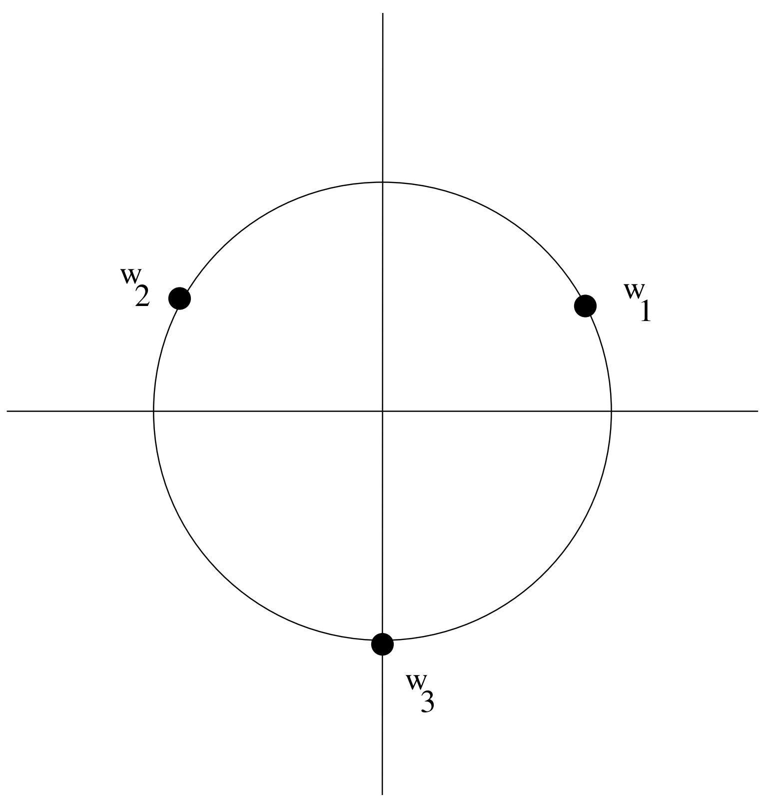
erfüllt ist.

*Lösung .* a) Die Zahl $w_1 = 3e^{j\pi/6}$ löst die Gleichung. Wählen wir dann $\zeta = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$, so sind auch $w_2 = \zeta w_1$ und $w_3 = \zeta^2 w_1$ Lösungen zur Gleichung. Nun ist aber

$$w_1 = 3(\cos(\pi/6) + j\sin(\pi/6)) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + j)$$

$$w_2 = \frac{3}{2}\frac{-1 + j\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + j) = \frac{3}{2}(-\sqrt{3} + j)$$

$$w_3 = \frac{3}{2}(\frac{-1 + j\sqrt{3}}{2})^2(\sqrt{3} + j) = -3j$$



b) Wir stellen ein lineares Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} -A + B - C &= p(\pi) &&= -4 \\ -A + 2jB + 3C &= p'(\pi/2) &&= 1 - 2j \\ A - 4B + 9C &= p''(\pi) &&= 15 \end{aligned}$$

Subtrahieren wir die 2. Gleichung von der 1. Gleichung und addieren die 3. Gleichung zur 1. Gleichung, folgt

$$(1-2j)B - 4C = -5 + 2j, \qquad -3B + 8C = 11$$

Woraus folgt $B = -1, C = 1$. Damit erhalten wir $A = 2$. Das gesuchte Polynom ist nun

$$p(t) = 2e^{jt} - e^{-2jt} + e^{3jt}$$

**Aufgabe 2** (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{, für} \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \cos(t-\pi) & \text{, für} \quad \frac{\pi}{2} \le t < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{, für} \quad \frac{3\pi}{2} \le t < 2\pi \end{cases}$$

$x(t)$ werde $(2\pi)$-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

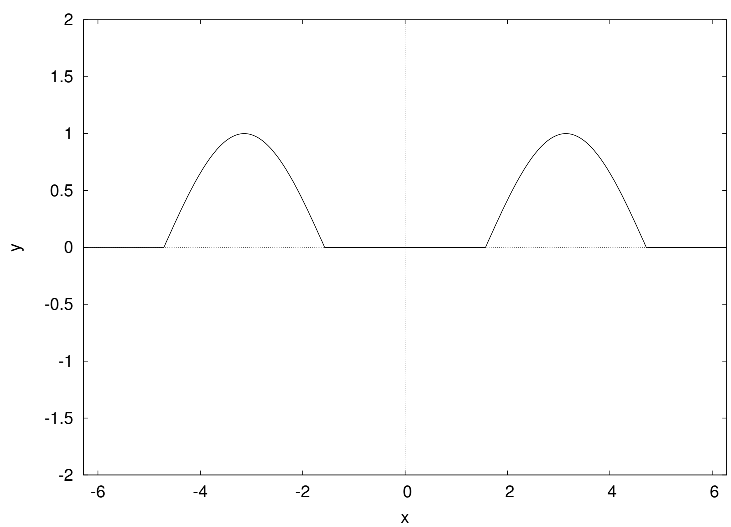
a) Skizzieren Sie die Funktion auf $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Berechnen Sie die Koeffizienten der Fourierreihe von $x(t)$ in reeller Form. Fassen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich zusammen. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

c) Berechnen Sie aus den Koeffizienten in reeller Form die Koeffizienten bei der Darstellung in komplexer Form.

*Lösung .*

a) Der Graph von $x$ sieht so aus:




b) Es gilt

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(t)dt = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}(t + \cos t\, \sin t)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{1}{2}$$

Für $k \geq 2$ ist wegen

$$\cos t \, \cos(kt) = \frac{1}{2}(\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)\,)$$

$$\begin{aligned}
-\pi a_k &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} ((\cos((k+1)t) + \cos((k-1)t)\,))dt \\
&= \frac{1}{2(k+1)}(\sin(\frac{3}{2}(k+1)\pi) - \sin(\frac{1}{2}(k+1)\pi) + \frac{1}{2(k-1)}(\sin(\frac{3}{2}(k-1)\pi) - \sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi)
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\sin(\frac{3}{2}(k+1)\pi) = \sin(\frac{3}{2}(k-1)\pi + 3\pi) = \sin(\frac{3}{2}(k-1)\pi + \pi) = -\,\sin(\frac{3}{2}(k-1)\pi),$$

$$\sin(\frac{1}{2}(k+1)\pi) = \sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi + \pi) = -\,\sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi)$$

und

$$\sin(\frac{3}{2}(k-1)\pi) = \sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi + (k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi)$$

Also ist

$$\begin{aligned}
a_k &= -\left(\frac{1}{2\pi(k-1)} - \frac{1}{2\pi(k+1)}\right)(\sin(\frac{3}{2}(k-1)\pi) - \sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi) \\
&= \left(\frac{1}{2\pi(k-1)} - \frac{1}{2\pi(k+1)}\right)(1-(-1)^{k-1})\sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(1-(-1)^{k-1})}{k^2-1}\sin(\frac{1}{2}(k-1)\pi)
\end{aligned}$$

Da $x(t)$ gerade ist, haben wir $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(t)\sin(kt)dt = 0$ für alle $k$.

c) Für die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k$ gilt $2c_k = a_k - jb_k = a_k$. Also ist $c_k = \frac{1}{2}a_k$.

**Aufgabe 3** (20 Punkte)
a) Gegeben sei die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{, für} \quad -1 \leq t < 0 \\ 1-t & \text{, für} \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{, für} \quad t \notin [-1,1] \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $x(t)$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und beachten Sie die nötigen Fallunterscheidungen.

b) Bestimmen aus dem Ergebnis zu a) mit Hilfe geeigneter Korrespondenzen und Rechenregeln die Fouriertransformierte von

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} 1+2t & \text{, für} \quad -1/2 \leq t < 0 \\ e^{2t} & \text{, für} \quad 0 \leq t < 1/2 \\ 0 & \text{, für} \quad t \notin [-1/2, 1/2] \end{cases}$$

*Lösung*. a) Es gilt für $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-1}^{0} e^{-t-j\omega t}dt + \int_0^1 (1-t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-1}^{0} e^{-(1+j\omega)t}dt + \int_0^1 (1-t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{-1}{1+j\omega}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{j}{\omega}(1-t)e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{j}{\omega}\int_0^1 e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{-1}{1+j\omega}(1-e^{(1+j\omega)}) + \frac{j}{\omega}(1-2e^{j\omega}) + \frac{1}{\omega^2}(1-e^{-j\omega})
\end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ haben wir

$$X(0) = \int_{-1}^{0} e^{-t} dt + \int_{0}^{1} (1-t) dt = e - 1 + \frac{1}{2} = e - \frac{1}{2}$$

b) Die Funktion $\widetilde{x}(t)$ ist mit $x(t)$ durch $\widetilde{x}(t) = x(-2t)$ verknüpft. Die Dilatationsregel sagt nun, dass $\mathscr{F}\widetilde{x}(\omega) = \frac{1}{2}\widehat{x}(-\omega/2)$.

**Aufgabe 4** (20 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) + 2x(t) = f(t), \qquad x(0 = 0, \quad x'(0) = 0\,,$$

wobei

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } \quad t < 0 \\ t & , \text{ für } \quad 0 \le t \le 1 \\ 1 & , \text{ für } \quad t > 1 \end{cases}$$

*Lösung*. Ist $X(s) = \mathscr{L}x(s)$, so liefert die Laplacetransformation des obigen AWP: $(s^2+2)X(x) = \mathscr{L}f(s)$, also

$$\mathscr{L}x(s) = X(s) = \frac{\mathscr{L}f(s)}{s^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathscr{L}(f * \sin(t\sqrt{2}))$$

Das ergibt uns für $t < 0$, dass $x(t) = 0$, für $0 < t \le 1$, dass

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t f(s) \sin((t-s)\sqrt{2}) ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t s \sin((t-s)\sqrt{2}) ds = \int_0^t (t-\sigma)\sin(\sqrt{2}\sigma) d\sigma \qquad \text{(mit der Substitution } \sigma := t - s\text{ )} \\
&= t \int_0^t \sin(\sqrt{2}\,\sigma) d\sigma - \int_0^t \sigma\, \sin(\sqrt{2}\,\sigma) d\sigma \\
&= \frac{t}{\sqrt{2}}(1 - \cos(\sqrt{2}t)\,) - \Big( - \frac{t}{\sqrt{2}}\, \cos(\sqrt{2}t) + \frac{1}{2}\sin(\sqrt{2}t)\Big) \\
&= \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sin(\sqrt{2}t)
\end{aligned}$$

und für $t > 1$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^1 s \sin((t-s)\sqrt{2}) ds + \int_1^t \sin((t-s)\sqrt{2}) ds \\
&= \frac{\sin(\sqrt{2}(t-1)) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}(t-1)) - \sin(\sqrt{2}t)}{2} + \frac{1 - \cos(\sqrt{2}(t-1))}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{\sin(\sqrt{2}(t-1)) - \sin(\sqrt{2}t)}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$