Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **19.3.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie alle 3. Wurzeln aus -1 in kartesischen Koordinaten.

b) Sei $w = -9-46j$. Dann ist $z_1 = 3-2j$ eine 3. Wurzel aus w. Berechnen Sie die beiden anderen 3. Wurzeln aus w.

c) Schreiben Sie $f(t) := \cos^2 2t \, \sin 3t$ als reelles trigonometrisches Polynom.

Lösung. a) Es ist $(-1)^3 = -1$. Die anderen beiden 3. Wurzeln aus -1 sind $e^{\pi j/3} = \cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+j\sqrt{3}}{2}$ und $e^{-\pi j/3} = \cos\frac{\pi}{3} - j\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1-j\sqrt{3}}{2}$.
b) Die gesuchten 3. Wurzeln sind außer z_1 noch

$$z_2 = -(\frac{1+j\sqrt{3}}{2})(3-2j) = -3-2\sqrt{3}+j(2-3\sqrt{3})$$

und

$$z_3 = -(\frac{1-j\sqrt{3}}{2})(3-2j) = -3+2\sqrt{3}+j(2+3\sqrt{3})$$

c) Wir schreiben $\cos(2t) = \frac{e^{2jt}+e^{-2jt}}{2}$ und $\sin(3t) = \frac{e^{3jt}-e^{-3jt}}{2j}$ und setzen das ein in f. Es entsteht dann

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{e^{2jt}+e^{-2jt}}{2}\right)^2 \left(\frac{e^{3jt}-e^{-3jt}}{2j}\right) \\ &= \frac{(e^{4jt}+2+e^{-4jt})(e^{3jt}-e^{-3jt})}{8j} \\ &= \frac{e^{7jt}+2e^{3jt}+e^{-jt}-e^{jt}-2e^{-3jt}-e^{-7jt}}{8j} \\ &= \frac{1}{4}\Big(-\sin t + 2\sin(3t) + \sin(7t)\Big) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Es sei

$$x(t) = \begin{cases} 1-t & \text{, wenn} \quad 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2} & \text{, wenn} \quad 1 < t < 2 \end{cases}$$

eine mit Periode $T = 2$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzte Funktion.

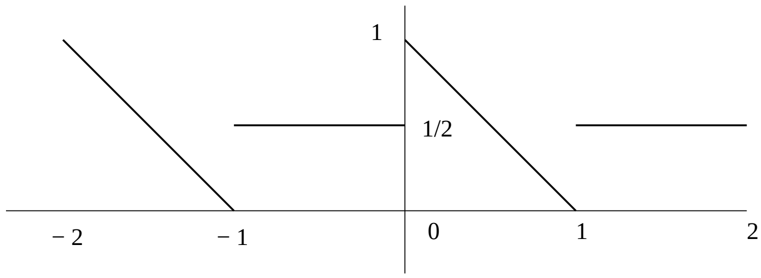
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $x(t)$ auf $[-2, 2]$.

b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von x.

c) Für jedes $t_0 \in (0, 2)$ berechnen Sie den Grenzwert der Fourierreihe von x in t_0.

Lösung.

a) Der Graph von x sieht so aus:



b) Hier ist $\omega = \pi$. Für ganzzahliges k sei

$$c_k := \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-\pi j k t} dt$$

Dann ist $c_0 = \dfrac{1}{2} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-t) dt + \frac{1}{2} \right) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$.
Nun ist aber für $k \neq 0$

$$\int (1-t) e^{-j\pi k t} dt = j \frac{1-t}{\pi k} e^{-j\pi k t} + \frac{j}{\pi k} \int e^{-j\pi k t} dt = j \frac{1-t}{\pi k} e^{-j\pi k t} - \frac{1}{(\pi k)^2} e^{-j\pi k t}$$

und damit

$$\begin{aligned} 2c_k &= \int_0^1 (1-t) e^{-j\pi k t} dt + \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-j\pi k t} dt\,, \\ &= \left(j \frac{1-t}{\pi k} e^{-j\pi k t} - \frac{1}{(\pi k)^2} e^{-j\pi k t} \right) \Big|_0^1 + \frac{j}{2\pi k} e^{-j\pi k t} \Big|_1^2 \\ &= \frac{-j}{\pi k} + \frac{1-(-1)^k}{(\pi k)^2} + j \frac{1-(-1)^k}{2\pi k} = -j \frac{1+(-1)^k}{2\pi k} + \frac{1-(-1)^k}{(\pi k)^2} \end{aligned}$$

Die reelle Fourierreihe von x lautet somit

$$x \approx \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{(\pi k)^2} \cos(\pi k t) + \frac{1+(-1)^k}{2\pi k} \sin(\pi k t)$$

c) Da $|c_k| \le \frac{4}{k}$ für alle $k \neq 0$ und , konvergiert die Fourierreihe von x an allen Stellen t_0, in denen x stetig ist, gegen $x(t_0)$. Es bleibt die Stelle $t_0 = 1$ zu untersuchen.

Wir prüfen die Dini-Bedingung nach. Für positives $s \ll 1$ ist

$$x(1+s) + x(1-s) - 2x_*(1) = \frac{1}{2} + 1 - (1-s) - \frac{1}{2} = s$$

also $\frac{x(1+s)+x(1-s)-2x_*(1)}{s}$ in $[0,1]$ integrabel. Die Fourierreihe von x konvergiert in 0 gegen $x_*(1) = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
a) Sei $g(x) = \cos x$, wenn $|x| \leq \pi/2$ und $g(x) := 0$, wenn $|x| \geq \pi/2$.

Angenommen, eine absolut integrable stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle $\widehat{f} = g$. Berechnen Sie f.

(Hinweis: Man kann benutzen, dass $\cos\omega\cos(\omega x) = \frac{1}{2}\Big(\cos((1+x)\omega) + \cos((1-x)\omega)\Big)$ ist.)

b) Kann man dann die Funktion f aus den Werten $f(\frac{n}{2}),\ n \in \mathbb{Z}$ mit dem Abtastsatz rekonstruieren?

Lösung. Zu a) Da f und $\widehat{f} = g$ absolut integrabel und f stetig ist, liefert die Umkehrformel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{j\omega x}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega)\cos(\omega x)d\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos((1+x)\omega)d\omega + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos((1-x)\omega)d\omega\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{1+x}\sin((1+x)\omega) + \frac{1}{1-x}\sin((1-x)\omega)\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}, \qquad \text{wenn } x^2 \neq 1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+x}\sin(\frac{(1+x)\pi}{2}) + \frac{1}{1-x}\sin(\frac{(1-x)\pi}{2})\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+x}\cos(\frac{\pi x}{2}) + \frac{1}{1-x}\cos(\frac{\pi x}{2})\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-x^2}\cos(\frac{\pi x}{2})
\end{aligned}$$

Mit der Regel von De L'Hospital folgt noch

$$\lim_{x\to 1} f(x) \longrightarrow \frac{1}{4}, \qquad \lim_{x\to -1} f(x) \longrightarrow \frac{1}{4}$$

b) Da f in $[-\lambda_c,\ \lambda_c]$ bandbegrenzt ist mit $\lambda_c = \pi/2$, kann man f aus den Werten $f(\frac{n}{2})$ rekonstruieren, denn $\frac{n}{2} = 2\pi n a$, wenn $a := \frac{1}{4\pi}$. Dann ist aber $a < \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2\lambda_c}$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Gegeben sei das folgende DGL-System:

$$\begin{aligned}
y_1' &= -5y_1 + 6y_2 + 1 \\
y_2' &= -3y_1 + 4y_2
\end{aligned}$$

zu den Startbedingungen $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 1$.

a) Bestimmen Sie dazu die Laplacetransformierten Y_1, Y_2 zu den Lösungen y_1, y_2.

b) Durch Rücktransformation berechnen Sie daraus y_1 und y_2.

Lösung. a) Durch Laplacetransformation gehen y_1 und y_2 in Funktionen Y_1, Y_2 über, welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sY_1 - 3 &= -5Y_1 + 6Y_2 + \tfrac{1}{s} \\ sY_2 - 1 &= -3Y_1 + 4Y_2 \end{aligned}$$

erfüllen. Eine Umformung führt auf

$$\begin{aligned} (s+5)Y_1 - 6Y_2 &= 3 + \tfrac{1}{s} \\ 3Y_1 + (s-4)Y_2 &= 1 \end{aligned}$$

Die 1. Gleichung multiplizieren wir mit $s-4$ und die 2. Gleichung mit 6. Dann addieren wir beides und finden

$$((s+5)(s-4)+18)Y_1(s) = (3+\frac{1}{s})(s-4)+6 = 3s - \frac{4}{s} - 5 = \frac{1}{s}(3s^2-5s-4)$$

also

$$Y_1(s) = \frac{3s^2-5s-4}{s(s^2+s-2}$$

Zur Berechnung von Y_2 subtrahieren wir vom 3-fachen der 1. Gleichung das $(s+5)$-fache der 2. Gleichung und finden

$$(-18-(s-4)(s+5))Y_2(s) = 4 + \frac{3}{s} - s = -\frac{s^2-4s-3}{s}$$

also

$$Y_2(s) = \frac{s^2-4s-3}{s(s^2+s-2)}$$

b) Es gilt $s^2+s-2 = (s-1)(s+2)$. Der Partialbruchansatz für Y_1 muss lauten

$$Y_1 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2}$$

Es folgt $A = \lim_{s\to 0} sY_1(s) = 2$ und $B = \lim_{s\to 1}(s-1)Y_1(s) = -2$ und $C = \lim_{s\to -2}(s+2)Y_1(s) = 3$ also ist

$$Y_1(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s+2}$$

und somit

$$y_1(t) = 2 - 2e^t + 3e^{-2t}$$

Entsprechend probieren wir

$$Y_2(s) = \frac{A'}{s} + \frac{B'}{s-1} + \frac{C'}{s+2}$$

und finden ebenso $A' = \frac{3}{2}, B' = -2, C' = \frac{3}{2}$, also

$$Y_2(s) = \frac{3}{2s} - \frac{2}{s-1} + \frac{3}{2(s+2)}$$

was auf

$$y_2(t) = \frac{3}{2} - 2e^t + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

führt.