Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **20.3.2012**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie die Quadratwurzeln aus $w := -\frac{3}{4} - j$ in kartesischen Koordinaten.

b) Lösen Sie damit die quadratische Gleichung $z^2 - z + j + 1 = 0$.

c) Die Schwingungen $f(t) = \sin(t + \frac{\pi}{8})$ und $g(t) = \cos(t - \frac{\pi}{8})$ werden zu der Resultanten $h(t) = f(t) + g(t) = A\sin(2t + \delta)$. überlagert. Berechnen Sie die Amplitude A.

Lösung . a) Wir probieren als Quadratwurzel $a + jb$, so dass $(a + jb)^2 = -\frac{3}{4} - j$ gilt. Aufteilen in Real-und Imaginärteil liefert

$$a^2 - b^2 = -\frac{3}{4}, \qquad 2ab = -1$$

Einsetzen von $b = -\frac{1}{2a}$ in die ersten Gleichung ergibt

$$a^2 - \frac{1}{4a^2} = -\frac{3}{4}, \qquad \text{also } a^4 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{4}$$

und damit $(a^2 + \frac{3}{8})^2 = (\frac{5}{8})^2$, was für $a = \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Daraus erhalten wir $b = -1$ folgt. Die gesuchten Quadratwurzeln sind dann $\frac{1}{2} - j$ und $-\frac{1}{2} + j$.

b) Die quadratische Gleichung $z^2 - z + j + 1 = 0$ ist mit $(z - \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4} - j$ äquivalent, also sind $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - j = 1 - j$ und $z_2 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - j) = j$ die gesuchten Lösungen.

c) Es ist

$$\begin{aligned} h(t) &= \operatorname{Im}(e^{jt + j\frac{\pi}{8}}) + \operatorname{Re}(e^{jt - j\frac{\pi}{8}}) \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{jt + j\frac{\pi}{8}} + je^{jt - j\frac{\pi}{8}}\right) \\ &= \operatorname{Im}(e^{jt}\left(e^{j\frac{\pi}{8}} + e^{j\frac{3\pi}{8}}\right)) \\ &= A\sin(t + \delta), \end{aligned}$$

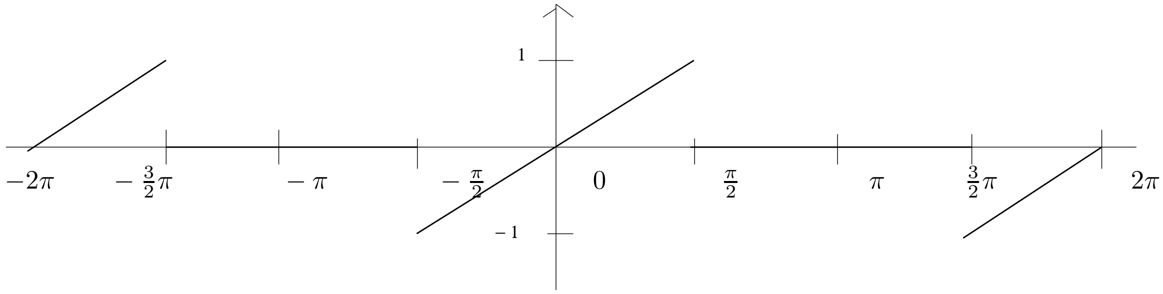
wobei

$$A^2 = |e^{j\frac{\pi}{8}} + e^{j\frac{3\pi}{8}}|^2 = 2 + 2\cos(\pi/4) = 2 + \sqrt{2}$$

und damit

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Es sei $x(t)$ die Funktion mit dem Graphen



a) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von x.

b) Für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ berechnen Sie den Grenzwert der Fourierreihe von x.

Lösung. a) Für ganzzahliges k sei

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} x(t) e^{-jkt} dt$$

Dann ist

$$c_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t dt = 0$$

und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\pi^2 c_k &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t e^{-jkt} dt \\
&= \frac{j}{k} \left(t e^{-jkt} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jkt} dt \right) \\
&= \frac{j}{k} \left(\pi \cos(\frac{\pi k}{2}) - \frac{j}{k} e^{-jkt} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) \\
&= \frac{j}{k} \pi \cos(\frac{\pi k}{2}) - \frac{2j}{k^2} \sin(\frac{\pi k}{2})
\end{aligned}$$

also

$$c_k = \pi^{-2} \left(\frac{j}{k} \cos(\frac{\pi k}{2}) - \frac{2j}{\pi k^2} \sin(\frac{\pi k}{2}) \right)$$

Für die reelle Fourierreihe von x folgt nun

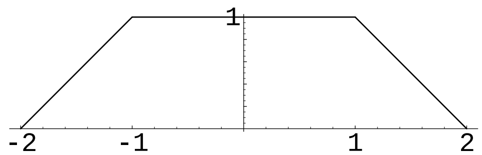
$$x \approx \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-2 \operatorname{Im} c_k) \sin(kt) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k} \cos(\frac{\pi k}{2}) + \frac{2}{\pi k^2} \sin(\frac{\pi k}{2}) \right) \sin(kt)$$

b) Da $|c_k| \leq \frac{2}{k}$ für alle $k \neq 0$, konvergiert die Fourierreihe von x an der Stelle t gegen $x(t)$, wenn x an dieser Stelle stetig ist. Zu betrachten bleiben noch die Stellen $\pm\pi/2$, wo x unstetig ist. Die Dini-Bedingung ist an beiden Stellen erfüllt, denn es gilt

$$\frac{x(\pm\pi/2 + s) + x(\pm\pi/2 - s) - 2x_*(\pm\pi/2)}{s} = \mp 1$$

für alle $0 < s < 1/10$. Das ergibt, dass die Fourierreihe von x in $\pm\pi/2$ gegen $x_*(\pm\pi/2) = \pm\pi/4$ konvergiert.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
a) Gegeben sei die Funktion $g(\omega)$ mit dem Graphen



Berechnen Sie eine absolut integrable Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\widehat{f} = g$.

Hinweis: Dazu denken Sie an die Fourier-Umkehrformel.

b) Angenommen, von der Funktion f werden die Werte $f(3\pi n/8)$ für $n \in \mathbb{Z}$ abgetastet. Kann man dann die Funktion f daraus komplett rekonstruieren? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Lösung. Die Funktion g ist absolut integrabel und stetig. Ist f absolut integrabel und stetig, so folgt aus $\widehat{f} = g$, dass sich f aus der Umkehrformel zurück gewinnen lässt. Es gilt dann

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

Nun gilt $g(\omega) = 1$ für $0 \leq \omega \leq 1$ und $g(\omega) = 2 - \omega$ für $1 \leq \omega \leq 2$ und $g(\omega) = 0$, wenn $\omega \geq 2$. Da g gerade ist, folgt

$$\begin{aligned}
\pi f(x) &= \int_0^2 g(\omega) \cos(x\omega) d\omega \\
&= \int_0^1 \cos(x\omega) d\omega + \int_1^2 (2 - \omega) \cos(x\omega) d\omega \\
&= \frac{\sin x}{x} + 2\, \frac{\sin(2x) - \sin x}{x} - \int_1^2 \omega \cos(x\omega) d\omega \\
&= \frac{2\sin(2x) - \sin x}{x} - \frac{\omega\, \sin(x\omega)}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{\sin(x\omega)}{x} d\omega \\
&= \int_1^2 \frac{\sin(x\omega)}{x} d\omega \\
&= \frac{\cos x - \cos(2x)}{x^2}
\end{aligned}$$

Da die Funktion $f(x) = \frac{\cos x - \cos(2x)}{\pi x^2}$ stetig und absolut integrabel auf ganz $\mathbb{R}$ ist, folgt $\widehat{f} = g$.

b) Das Abtasttheorem ist mit $\lambda_c = 2$ und $a := \frac{3}{16} < \frac{1}{4} = \frac{1}{2\lambda_c}$ anwendbar und erlaubt eine positive Antwort.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Gegeben sei das folgende DGL-System:

$$\begin{aligned}
y_1' &= 16y_1 - 30y_2 + 2 \\
y_2' &= 9y_1 + 17y_2 + 1
\end{aligned}$$

zu den Startbedingungen $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = -1$.

a) Bestimmen Sie dazu die Laplacetransformierten Y_1, Y_2 zu den Lösungen y_1, y_2.

b) Berechnen Sie zu

$$\widetilde{Y}_1(s) = \frac{2s}{s^2 - 5s + 6}, \qquad \widetilde{Y}_2(s) = \frac{-s^2 + 7s + 6}{s(s^2 - 5s + 6)}.$$

die Laplace-Rücktransformierten.

Lösung. a) Durch Laplacetransformation gehen y_1 und y_2 in Funktionen Y_1, Y_2 über, welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sY_1 - 2 &= 16Y_1 - 30Y_2 + \tfrac{2}{s} \\ sY_2 + 1 &= 9Y_1 + 17Y_2 + \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

erfüllen. Eine Umformung führt auf

$$\begin{aligned} (s - 16)Y_1 + 30Y_2 &= 2 + \tfrac{2}{s} \\ -9Y_1 + (s - 17)Y_2 &= -1 + \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

Die 1. Gleichung multiplizieren wir mit $s - 17$. Von dem Resultat subtrahieren wir das 30-Fache der 2. Gleichung. So entsteht

$$((s - 16)(s - 17) + 270)Y_1(s) = (2 + \frac{2}{s})(s - 17) + 30 - \frac{30}{s} = 2s - 2 - \frac{64}{s} = \frac{2s^2 - 2s - 64}{s}$$

also

$$Y_1(s) = \frac{2s^2 - 2s - 64}{s(s^2 - 33s + 542)}$$

Zur Berechnung von Y_2 multiplizieren wir Gleichung 1 mit 9 und Gleichung 2 mit $s - 16$. Dann addieren wir beides und finden:

$$((s - 16)(s - 17) + 270)Y_2(s) = 18 + \frac{18}{s} + (-1 + \frac{1}{s})(s - 16) = -s + 35 + \frac{2}{s} = \frac{-s^2 + 35s + 2}{s}$$

also

$$Y_2(s) = \frac{-s^2 + 35s + 2}{s(s^2 - 33s + 542)}$$

b) Es gilt $s^2 - 5s + 6 = (s - 2)(s - 3)$. Der Partialbruchansatz für $\widetilde{Y}_1$ muss lauten

$$\widetilde{Y}_1 = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s - 3}$$

Es folgt $A = \lim_{s \to 2}(s - 2)Y_1(s) = -4$ und $B = \lim_{s \to 3}(s - 3)Y_1(s) = 6$, also ist

$$\widetilde{Y}_1(s) = -\frac{4}{s - 2} + \frac{6}{s - 3}$$

und somit

$$\widetilde{y}_1(t) = -4e^{2t} + 6e^{3t}$$

Entsprechend probieren wir

$$\widetilde{Y}_2(s) = \frac{A'}{s} + \frac{B'}{s - 2} + \frac{C'}{s - 3}$$

und finden ebenso $A' = 1, B' = -8, C' = 6$, also

$$\widetilde{Y}_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{8}{s - 2} + \frac{6}{s - 3}$$

was auf

$$\widetilde{y}_2(t) = 1 - 8e^{2t} + 6e^{3t}$$

führt.