Prof. Dr. K. Fritzsche, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **22.3.2011**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Stellen Sie die Funktion $f(t) = \sin^3 t + 2\cos^2 t$ als trigonometrisches Polynom dar.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^2 - z = \frac{1}{4} + \frac{j}{2}\sqrt{3}\,.$$

Berechnen Sie dabei die Quadratwurzeln aus j in kartesischen Koordinaten.

Lösung. a) Wir schreiben $\sin t = \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}$ und $\cos t = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}$ und setzen dies ein:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)^3 + 2\left(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{3jt}-e^{-3jt}-3e^{jt}+3e^{-jt}}{-8j} + \frac{e^{2jt}+2+e^{-2jt}}{2} \\
&= 1+\cos(2t)+\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin(3t)
\end{aligned}$$

b) Ist z eine Lösung, so folgt

$$(z-\frac{1}{2})^2 = z^2 - z + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}\sqrt{3}$$

Aber rechts steht nichts Anderes als $e^{j\pi/3}$. Wir wählen also

$$\zeta = e^{j\pi/6} = \cos\pi/6 + j\sin\pi/6 = \frac{\sqrt{3}+j}{2}$$

und finden die Lösungen

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j, \qquad z_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Es sei $x(t) = t$, wenn $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $x(t) = 0$, wenn $t \in (-\pi, \pi] \setminus (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Diese Funktion denken wir uns zu einer (2π)-periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von x.

b) Für jedes $t \in (-\pi, \pi]$ berechnen Sie den Grenzwert der Fourierreihe von x.

Lösung. a) Da x ungerade ist, haben wir

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(nt)dt = 0$$

für alle $n \geq 0$. Es genügt daher, die Koeffizienten

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin(nt) dt$$

zu berechnen. Da nun $x(t)\sin(nt)$ gerade ist und außerhalb $(-\pi/2,\ \pi/2)$ verschwindet, folgt

$$\begin{aligned}
\pi\, b_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t)\sin(nt)dt \\
&= 2\int_0^{\pi/2} t\, \sin(nt)\, dt \\
&= 2\left(-\frac{t}{n}\cos(nt)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\, dt\right) \\
&= 2\left(-\frac{\pi}{2n}\cos(n\pi/2) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi/2)\right)
\end{aligned}$$

Das führt auf

$$b_n = -\frac{1}{n}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2}{\pi n^2}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

und

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{2}{\pi n^2}\sin(\frac{n\pi}{2})\right)\sin(nt)$$

b) Da die komplexen Fourierkoeffizienten $c_n^* = -\frac{j}{2}b_n$ durch $|c_n^*| \leq 3/n$ abzuschätzen sind, konvergiert obige Fourierreihe für alle die $t_0 \in (-\pi,\pi]$ gegen $x(t_0)$, in denen x stetig ist. Das sind alle $t_0 \in (-\pi,\pi] \setminus \{-\pi/2,\ \ \pi/2\}$. Bei $t_0 = -\pi/2$ und $t_0 = \pi/2$ konvergiert sie, da die Dini-Bedingung für x erfüllt ist, gegen $\frac{1}{2}x(-\pi/2\ +) = -\pi/4$ bzw. gegen $\frac{1}{2}x(\pi/2\ -) = \pi/4$.

Dini-Bedingung bei $-\pi/2$:

$$\frac{x(t-\pi/2) + x(-t-\pi/2) - (-\pi/2)}{t} = \frac{t-\pi/2+\pi/2}{t} = 1$$

für $t > 0$. Also ist

$$\int_0^{\delta} \left|\frac{x(t-\pi/2) + x(-t-\pi/2) - (-\pi/2)}{t}\right| dt = \delta$$

endlich.

Dini-Bedingung bei $\pi/2$:

$$\frac{x(t+\pi/2) + x(-t+\pi/2) - \pi/2}{t} = \frac{-t+\pi/2-\pi/2}{t} = -1$$

für $t > 0$ Also ist auch

$$\int_0^{\delta} \left|\frac{x(t+\pi/2) + x(-t+\pi/2) - \pi/2}{t}\right| dt = \delta$$

endlich.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Es sei $f_1(t) := t$ für $|t| \leq 1$ und $f_1(t) = 0$ sonst. Berechnen Sie dann die Fouriertransformierte $\widehat{f_1}$ zu f_1.

b) Angenommen, eine stetige und absolut integrable Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-|t|}dt = e^{-x^2}$$

b1) Was ist dann die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ von f ?

Dabei beachten Sie: Die Fouriertransformierte zu e^{-x^2} ist $\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$, die Fouriertransformierte zu $e^{-|t|}$ ist $\frac{2}{1+\omega^2}$.

b2) Was ist f selbst?

Hinweis: Dazu denken Sie an den Faltungssatz und die Differenziationssätze.

Lösung. a) Zunächst beachten wir, dass für $\omega \neq 0$ gilt

$$\int te^{-j\omega t}dt = F(t) := \frac{j}{\omega}te^{-j\omega t} - (\frac{j}{\omega})^2 e^{-j\omega t}$$

Aus der Definition errechnen wir

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_1(\omega) &= F(1) - F(-1) \\
&= \frac{j}{\omega}(e^{-j\omega} + e^{j\omega}) + \frac{1}{\omega^2}(e^{-j\omega} - e^{j\omega}) \\
&= \frac{2j}{\omega}(\cos\omega - \frac{\sin\omega}{\omega})
\end{aligned}$$

Weiter ist $\widehat{f}_1(0) = \int_{-1}^{1} tdt = 0$.

b1) Schreiben wir $g(t) = e^{-|t|}$, und $h(x) = e^{-x^2}$, so ist die gegebene Integralgleichung gerade

$$f * g = h$$

Durch Fouriertransformation wird daraus

$$\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{h}$$

Da nun $\widehat{g}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$, haben wir

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1+\omega^2}{2}\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(1+\omega^2)e^{-\omega^2/4}$$

b2) Es gilt

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\widehat{h}(\omega) + \omega^2\widehat{h}(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(\widehat{h}(\omega) - \widehat{h''}(\omega)\right)$$

Das bedeutet, da keine 2 verschiedenen Funktionen dieselbe Fouriertransformierte haben können

$$f(x) = \frac{1}{2}(h - h'')(x)) = \frac{1}{2}(3 - 4x^2)e^{-x^2}$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Gegeben sei das folgende DGL-System:

$$\begin{aligned}
y_1' &= 13y_1 - 15y_2 + 1 \\
y_2' &= 9y_1 - 11y_2 - 1
\end{aligned}$$

zu den Startbedingungen $y_1(0) = y_2(0) = 1$.

a) Bestimmen Sie dazu die Laplacetransformierten Y_1, Y_2 zu den Lösungen y_1, y_2.

Zur Orientierung: Es muss herauskommen:

$$Y_1(s) = \frac{s^2 - 3s + 26}{s(s-4)(s+2)}, \qquad Y_2(s) = \frac{s^2 - 5s + 22}{s(s-4)(s+2)}.$$

b) Durch Rücktransformation berechnen Sie daraus y_1 und y_2.

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned} sY_1 - 1 &= 13Y_1 - 15Y_2 + 1/s \\ sY_2 - 1 &= 9Y_1 - 11Y_2 - 1/s \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (-13+s)Y_1 + 15Y_2 &= 1 + 1/s \\ -9Y_1 + (s+11)Y_2 &= 1 - 1/s \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die 1. Gleichung mit $s+11$ und die 2. Gleichung mit 15. Dann subtrahieren wir beide voneinander. Es folgt dann

$$((s+11)(s-13)+135)Y_1 = (1+\frac{1}{s})(s+11) - 15(1-\frac{1}{s})$$

oder

$$(s^2 - 2s - 8)Y_1 = s - 3 + \frac{26}{s} = \frac{s^2 - 3s + 26}{s}$$

Zusammen mit $s^2 - 2s - 8 = (s-4)(s+2)$ folgt

$$Y_1(s) = \frac{s^2 - 3s + 26}{s(s-4)(s+2)}$$

Zur Berechnung von Y_2 multiplizieren wir die erste Gleichung mit 9 und die zweite mit $s - 13$ und addieren beide. Dann wird

$$((s+11)(s-13)+135)Y_2 = 9(1+\frac{1}{s}) + (s-13)(1-\frac{1}{s})$$

oder

$$(s-4)(s+2)Y_2 = s - 5 + \frac{22}{s} = \frac{s^2 - 5s + 22}{s}$$

Damit ist

$$Y_2(s) = \frac{s^2 - 5s + 22}{s(s-4)(s+2)}$$

b) Zuerst bestimmen wir Partialbruchdarstellung von Y_1 und Y_2. Es gilt

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{A_1}{s} + \frac{B_1}{s-4} + \frac{C_1}{s+2} \\ Y_2 &= \frac{A_2}{s} + \frac{B_2}{s-4} + \frac{C_2}{s+2} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_1 + B_1 e^{4t} + C_1 e^{-2t} \\ y_2(t) &= A_2 + B_2 e^{4t} + C_2 e^{-2t} \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$A_1 = sY_1(s)\Big|_{s=0} = -\frac{13}{4}, \quad B_1 = (s-4)Y_1(s)\Big|_{s=4} = \frac{5}{4}, \quad C_1 = (s+2)Y_1(s)\Big|_{s=-2} = 3$$

und entsprechend

$$A_2 = sY_2(s)\Big|_{s=0} = -\frac{11}{4}, \quad B_2 = (s-4)Y_2(s)\Big|_{s=4} = \frac{3}{4}, \quad C_2 = (s+2)Y_2(s)\Big|_{s=-2} = 3$$

Dies liefert

$$y_1(t) = -\frac{13}{4} + \frac{5}{4}e^{4t} + 3e^{-2t}$$

$$y_2(t) = -\frac{11}{4} + \frac{3}{4}e^{4t} + 3e^{-2t}$$