Prof. Dr. J. Ruppenthal — Wuppertal, 03.09.2019

Mathematik für Sicherheitsingenieure II (MScS, MScQ)

Modulteil: Mathematik II

Aufgabe 1. *(6+8+6 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$i^3 \cdot (1+3i) \quad , \quad \frac{11-10i}{4+i} \quad , \quad e^{\frac{9}{2}\pi i}$$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms z^3+z^2+4z+4 und geben Sie die Nullstellen auch in Polarkoordinaten an.

c) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung:

$$e^z = -2 \, .$$

Hinweis: Stellen Sie -2 in Polarkoordinaten dar. Es gibt unendlich viele Lösungen.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
i^3 \cdot (1+3i) &= -i \cdot (1+3i) = 3 - i \\
\frac{11-10i}{4+i} &= (11-10i) \cdot \frac{\overline{4+i}}{|4+i|^2} = (11-10i) \cdot \frac{4-i}{4^2+1^2} \\
&= \frac{1}{17}(44 - 11i - 40i - 10) = \frac{1}{17}(34 - 51i) = 2 - 3i \\
e^{\frac{9}{2}\pi i} &= e^{\frac{1}{2}\pi i} = i
\end{aligned}$$

b) Wir erraten zunächst die Nullstelle -1. Polynomdivision liefert dann:

$$\left(z^3 + z^2 + 4z + 4\right) : (z+1) = z^2 + 4$$

Nun findet man entweder direkt $z^2+4 = (z+2i)(z-2i)$ durch die dritte binomische Formel oder mit Hilfe der (p,q)-Formel. Somit ergibt sich die Linearfaktorzerlegung:

$$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z+1)(z+2i)(z-2i)$$

Die Nullstellen $-1, 2i, -2i$ schreiben sich in Polarkoordinaten als:

$$-1 = e^{\pi i} \quad , \quad 2i = 2e^{\frac{\pi}{2} i} \quad , \quad -2i = 2e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

c) Gesucht sind die Lösungen $z = x + iy$ der Gleichung

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = 2e^{\pi i}.$$

Gesucht sind also alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $e^x = 2$ und $e^{iy} = e^{\pi i}$. Damit ist die Lösungsmenge:

$$L = \{\ln 2 + (2k+1)\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Aufgabe 2. *(10+4+6 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \sin(2x)$.

a) Berechnen Sie durch Integration die komplexe Fourierreihe von f.

b) Zeigen Sie die Gleichheit: $f(x) = 2\cos(x)\sin(x)$.

c) Geben Sie eine stückweise stetige, periodische Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die im Punkt 0 nicht stetig ist. Welchen Wert nimmt die Fourierreihe zu g im Punkt 0 an?

Lösung:

a) f hat die Periode $T = 2\pi$ und damit die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 1$ (f hat auch noch die kürzere Periode π, aber im folgenden ist es günstig, mit der Periode 2π zu arbeiten). Wir dürfen über ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ der Länge 2π integrieren und erhalten mit partieller Integration unter Verwendung von

$$\sin(2x) \quad = \quad \frac{1}{2i}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)$$

die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} e^{2ix}e^{-ikx}dx - \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-2ix}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} e^{i(2-k)x}dx - \frac{1}{4\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-i(2+k)x}dx \\
&= \frac{1}{4\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=2, \\ \left[\frac{e^{i(2-k)x}}{i(2-k)}\right]_0^{2\pi} & ,k\neq 2 \end{array}\right\} - \frac{1}{4\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=-2, \\ \left[\frac{e^{i(-2-k)x}}{i(-2-k)}\right]_0^{2\pi} & ,k\neq -2 \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=2, \\ 0 & ,k\neq 2 \end{array}\right\} - \frac{1}{4\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=-2, \\ 0 & ,k\neq -2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} -1/2i & ,k=-2, \\ 1/2i & ,k=2, \\ 0 & ,k\notin\{-2,2\} \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Somit ist die komplexe Fourierreihe von f (wenig überraschend):

$$f \quad \sim \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)e^{ik\omega x} = -\frac{1}{2i}e^{-2ix} + \frac{1}{2i}e^{2ix} = \frac{i}{2}e^{-2ix} - \frac{i}{2}e^{2ix}$$

b) Nach der Exponentialdarstellung für Kosinus und Sinus gilt

$$2\cos(x)\sin(x) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right),$$

was mit der Fourierreihe von f übereinstimmt (*2 Punkte*). Da f eine stetige Funktion ist, besteht aber auch Gleichheit zwischen f und seiner Fourierreihe (*2 Punkte*).

c) Ein Beispiel ist etwa die periodische Fortsetzung von $g(x) = \left\{\begin{array}{cc} -1 & , \; -1 < x \leq 0 \\ 1 & , \; 0 < x \leq 1 \end{array}\right.$ auf die reelle Achse (*3 Punkte*). In Sprungstellen nimmt die Fourierreihe den Mittelwert des links- und des rechtsseitigen Grenzwertes an. In diesem Beispiel also $\frac{1}{2}(-1+1) = 0$ (*3 Punkte*).

Aufgabe 3. *(2+4+4+10 Punkte)*

a) Was ist der Vorteil von Laplace-Transformation gegenüber Fourier-Transformation?

b) Geben Sie eine Funktion an, für die die Laplace-Transformation existiert, nicht aber die Fourier-Transformation. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

c) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\cos(x)}{e^{-x}}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Berechnen Sie die Fourier-Transformation von $f(x) = e^{1-|x|}$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

Lösung:

a) Während die Fourier-Transformation (für uns) nur auf absolut integrierbare Funktionen anwendbar ist, existiert die Laplace-Transformation für Funktionen vom exponentiellen Typ (siehe Aufgabe (b)).

b) Ein Beispiel ist die konstante Funktion $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese ist nicht absolut integrierbar und die Fourier-Transformation existiert nicht: Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-iwx} dx = ... = \frac{i}{w} \lim_{x\to+\infty} e^{-iwx} - \frac{i}{w} \lim_{x\to-\infty} e^{-iwx}$$

existiert weder für $w \neq 0$ noch für $w = 0$ (gesonderte Berechnung). Die Laplace-Transformation von f existiert aber: $\big(\mathcal{L}1\big)(s) = \frac{1}{s}$ für $s \in \mathbb{C}$ mit Re $s > 0$.

c) Mit dem Satz von l'Hospital (der hier angewendet werden darf!) ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

Wegen $0 \leq \left|\frac{\cos(x)}{e^{-x}}\right| \leq e^x$ und $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ gilt $\lim_{x\to-\infty} \left|\frac{\cos(x)}{e^{-x}}\right| = 0$ und damit auch

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(x)}{e^{-x}} \quad = \quad 0$$

d) Mit partiellen Integrationen ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = e \cdot \int_{-\infty}^{0} e^x e^{-iwx} dx + e \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-x}e^{-iwx}dx \\
&= e \cdot \int_{-\infty}^{0} e^{(1-iw)x} dx + e \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{(-1-iw)x} dx \\
&= \frac{e}{1-iw} \left[e^{(1-iw)x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{e}{1+iw} \left[e^{(-1-iw)x}\right]_{0}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x\to-\infty} \left|e^{(1-iw)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \left|e^{(-1-iw)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

folgt weiter

$$... \quad = \quad \frac{e}{1-iw} + \frac{e}{1+iw} = e \cdot \frac{1+iw+1-iw}{(1-iw)(1+iw)} = \frac{2e}{1+w^2}.$$

Aufgabe 4. *(5+5+10 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Maximum von $|e^{\sigma+it}|$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma \leq 0$.

b) Berechnen Sie durch Integration die Laplacetransformierte von $h(t) = te^t$ explizit, also $\big(\mathcal{L}(te^t)\big)(s)$. Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\big(\mathcal{L}(te^t)\big)(s)$?

c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$f''(t) - 4f(t) = 2 - 4t^2 \quad , \quad f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = 2.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und machen Sie auch die Probe.

Lösung:

a) Wegen

$$\left|e^{\sigma+it}\right| \;=\; \left|e^{\sigma}\right| \cdot \left|e^{it}\right| = e^{\sigma} \cdot \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = e^{\sigma} \leq 1$$

für $\sigma \leq 0$ ist $|e^{\sigma+it}| \leq 1$, und das Maximum 1 wird für $\sigma = 0$ angenommen.

b) Durch partielle Integration berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}(te^t)\big)(s) &= \int_0^{+\infty} te^{(1-s)t}dt = \Big[\frac{t}{1-s}e^{(1-s)t}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{(1-s)t}}{1-s}dt \\
&= \Big[\frac{t}{1-s}e^{(1-s)t} - \frac{1}{(1-s)^2}e^{(1-s)t}\Big]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{1-s}\lim_{t\to+\infty} te^{(1-s)t} - \frac{1}{(1-s)^2}\lim_{t\to+\infty} e^{(1-s)t}.
\end{aligned}$$

Die Grenzwerte existieren und sind gleich 0 für Re $s > 1$. Dann ist $\big(\mathcal{L}t\big)(s) = \frac{1}{(1-s)^2}$.

c) Es sei $F(s) := \big(\mathcal{L}f\big)(s)$ die Laplacetransformierte von f. Damit ist dann:

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}f'\big)(s) &= sF(s) - f(0) = sF(s) - 1 \\
\big(\mathcal{L}f''\big)(s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - s - 2
\end{aligned}$$

Ausserdem ist $\big(\mathcal{L}(2)\big)(s) = \frac{2}{s}$ und $\big(\mathcal{L}(4t^2)\big)(s) = \frac{8}{s^3}$. Damit transformiert die Differentialgleichung unter der Laplacetransformation zu:

$$\begin{aligned}
s^2F(s) - s - 2 - 4F(s) &= \frac{2}{s} - \frac{8}{s^3} \\
\Leftrightarrow \quad \big(s^2 - 4\big)F(s) - (s+2) &= 2 \cdot \frac{s^2-4}{s^3} \\
\Leftrightarrow \quad \big(s^2 - 4\big)F(s) &= 2 \cdot \frac{s^2-4}{s^3} + (s+2) \\
\Leftrightarrow \quad F(s) &= \frac{2}{s^3} + \frac{s+2}{s^2-4} = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s-2}.
\end{aligned}$$

Damit ist also $F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s-2}$ und die Rücktransformation ergibt:

$$f(t) \;=\; t^2 + e^{2t}$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem (Nachrechnen!) zeigt, dass dies die korrekte Lösung ist.