Prof. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 04.09.2018

Mathematik für Sicherheitsingenieure II (MScS, MScQ)

Modulteil: Mathematik II

Aufgabe 1. *(6+6+8 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(4+2i)(4-2i) \quad , \quad \frac{11i-3}{3i-2} \quad , \quad e^{-5\pi i}$$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms $z^3 - z^2 + 9z - 9$.

c) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 16,$$

d.h. finden Sie die 4-ten Wurzeln von 16. Geben Sie diese sowohl in der Form $x+iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, als auch in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
(4+2i)(4-2i) &= 4^2 - (2i)^2 = 16 - 4i^2 = 20 \\
\frac{11i-3}{3i-2} &= (11i-3) \cdot \frac{\overline{3i-2}}{|3i-2|^2} = (11i-3) \cdot \frac{-3i-2}{3^2+(-2)^2} \\
&= \frac{1}{13}(33 - 22i + 9i + 6) = \frac{1}{13}(39 - 13i) = 3 - i \\
e^{-5\pi i} &= e^{\pi i} = -1
\end{aligned}$$

b) Wir erraten zunächst die Nullstelle 1. Polynomdivision liefert dann:

$$\left(z^3 - z^2 + 9z - 9\right) : (z-1) = z^2 + 9$$

Nun findet man entweder direkt $z^2+9 = (z+3i)(z-3i)$ durch die dritte binomische Formel, oder bestimmt mit der (p,q)-Formel die Nullstellen $3i$ und $-3i$ von z^2+9:

$$z_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0}{4} - 9} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$$

Somit ergibt sich die Linearfaktorzerlegung:

$$z^3 - z^2 + 9z - 9 \quad = \quad (z-1)(z-3i)(z+3i)$$

c) Es gibt genau vier 4-te Wurzeln. Wegen $16 = 16e^0$ sind dies $\sqrt[4]{16} \cdot e^{i\varphi}$ mit $\varphi = k\frac{2\pi}{4}$ für $k = 0, 1, 2, 3$. Also: $2e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$. In kartesischen Koordinaten sind dies die Zahlen $2, 2i, -2, -2i$.

Aufgabe 2. *(12+3+5 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$.

a) Berechnen Sie durch Integration die komplexe Fourierreihe von f.

b) Verwenden Sie die reelle Fourierreihe von f, um $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ zu zeigen.

c) Verwenden Sie die Translationsformel und Teil (a), um $f(x+\pi) = f(x)$ zu zeigen.

Lösung:

a) f hat die Periode $T = 2\pi$ und damit die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = 1$ (f hat auch noch die kürzere Periode π, aber im folgenden ist es günstig, mit der Periode 2π zu arbeiten). Wir dürfen über ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ der Länge 2π integrieren und erhalten mit partieller Integration unter Verwendung von

$$\cos(x) \cdot \sin(x) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{1}{4i}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$$

die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{8\pi i}\int_0^{2\pi} e^{2ix}e^{-ikx}dx - \frac{1}{8\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-2ix}e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{8\pi i}\int_0^{2\pi} e^{i(2-k)x}dx - \frac{1}{8\pi i}\int_0^{2\pi} e^{-i(2+k)x}dx \\
&= \frac{1}{8\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=2, \\ \left[\frac{e^{i(2-k)x}}{i(2-k)}\right]_0^{2\pi} & ,k \neq 2 \end{array}\right\} - \frac{1}{8\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=-2, \\ \left[\frac{e^{i(-2-k)x}}{i(-2-k)}\right]_0^{2\pi} & ,k \neq -2 \end{array}\right\} \\
&= \frac{1}{8\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=2, \\ 0 & ,k \neq 2 \end{array}\right\} - \frac{1}{8\pi i}\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & ,k=-2, \\ 0 & ,k \neq -2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{cc} -1/4i & ,k=-2, \\ 1/4i & ,k=2, \\ 0 & ,k \notin \{-2,2\} \end{array}\right\}
\end{aligned}$$

Somit ist die komplexe Fourierreihe von f (wenig überraschend):

$$f \quad \sim \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)e^{ik\omega x} = -\frac{1}{4i}e^{-2ix} + \frac{1}{4i}e^{2ix} = \frac{i}{4}e^{-2ix} - \frac{i}{4}e^{2ix}$$

b) Da die Fourierkoeffizienten rein imaginär sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$f \quad \sim \quad c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} 2\mathrm{Re}\ c_k^*(f)\cos(k\omega x) - 2\mathrm{Im}\ c_k^*(f)\sin(k\omega x) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Da f stetig ist, besteht sogar Gleichheit zwischen f und der Fourierreihe.

c) Nach der Translationsformel (oder einfach einsetzen) gilt:

$$f(x+\pi) \quad \sim \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)e^{i\pi\omega k}e^{ik\omega x} = \frac{i}{4}e^{-2\pi i}e^{-2ix} - \frac{i}{4}e^{2\pi i}e^{2ix} = \frac{i}{4}e^{-2ix} - \frac{i}{4}e^{2ix} \sim f(x)$$

Da f stetig ist, besteht wieder Gleichheit (auf beiden Seiten).

Aufgabe 3. *(10+10 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Fouriertransformation $\widehat{f}$ von $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ |x| \leq 3, \\ 0 & , \ |x| > 3. \end{cases}$

Vereinfachen Sie dabei $\widehat{f}$ so weit wie möglich, indem Sie den Sinus verwenden.

b) Für welche Exponenten $a \geq 0$ ist die Funktion

$$g_a(x) = \frac{1}{(1+x^2)^a}$$

auf $\mathbb{R}$ absolut integrabel, für welche nicht? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Für $w \neq 0$ ist die Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \int_{-3}^{3} e^{-iwx}dx = \left[\frac{1}{-iw}e^{-iwx}\right]_{-3}^{3} \\ &= \frac{1}{iw}\left(e^{3iw} - e^{-3iw}\right) = \frac{2}{w}\cdot\frac{1}{2i}\left(e^{3iw} - e^{-3iw}\right) = \frac{2\sin(3w)}{w}. \end{aligned}$$

Ausserdem ist

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 6,$$

also insgesamt:

$$\widehat{f}(w) = \begin{cases} \frac{2\sin(3w)}{w} & , \ w \neq 0, \\ 6 & , \ w = 0. \end{cases}$$

b) Die Funktion g_a ist für $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ nicht absolut integrabel, denn in diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^a} &\geq \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^a} \geq \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(2x^2)^a} = \frac{1}{2^a}\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a}} \\ &\geq \frac{1}{4}\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-2a}\left[x^{1-2a}\right]_1^{+\infty} & , \ 0 \leq a < \frac{1}{2} \\ \left[\ln(x)\right]_1^{+\infty} & , \ a = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-2a}\left(x^{1-2a} - 1\right) & , \ 0 \leq a < \frac{1}{2} \\ \ln(x) & , \ a = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = +\infty \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\lim_{x\to+\infty} x^{1-2a} = +\infty$ für $0 \leq a < \frac{1}{2}$ und $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ verwendet.

Die Funktion g_a ist für $a > \frac{1}{2}$ absolut integrabel, denn aus Symmetriegründen ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)dx &= \int_{-\infty}^{-1} g_a(x)dx + \int_{-1}^{1} g_a(x)dx + \int_{1}^{+\infty} g_a(x)dx \\ &\leq \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1} + 2\cdot\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a}} = 2 + \frac{2}{1-2a}\left[x^{1-2a}\right]_1^{+\infty} \\ &= 2 + \frac{2}{1-2a}\left(\lim_{x\to+\infty} x^{1-2a} - 1\right) = 2 + \frac{2}{2a-1}, \end{aligned}$$

da der Grenzwert wegen $1 - 2a < 0$ verschwindet.

Aufgabe 4. *(4+4+12 Punkte)*

a) Berechnen Sie durch Integration die Laplacetransformierte der Funktion $h(t) = t$ explizit, also $\big(\mathcal{L}t\big)(s)$. Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\big(\mathcal{L}t\big)(s)$?

b) Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2}.$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$f''(t) - f(t) = -2e^t \quad , \quad f(0) = 3 \quad , \quad f'(0) = 0.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und machen Sie auch die Probe.

Lösung:

a) Durch partielle Integration berechnen wir:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}t\big)(s) &= \int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \Big[\frac{t}{-s}e^{-st}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{-s}dt = \Big[\frac{t}{-s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\lim_{t\to+\infty} te^{-st} - \frac{1}{s^2}\lim_{t\to+\infty} e^{-st}.\end{aligned}$$

Die Grenzwerte existieren und sind gleich 0 für Re $s > 0$. Dann ist $\big(\mathcal{L}t\big)(s) = \frac{1}{s^2}$.

b) Wegen $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ gilt nach der Produktregel für Folgen:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} = 0.$$

Mit dem Satz von l'Hospital ist:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0.$$

c) Es sei $F(s) := \big(\mathcal{L}f\big)(s)$ die Laplacetransformierte von f. Damit ist dann:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}f'\big)(s) &= sF(s) - f(0) = sF(s) - 3 \\ \big(\mathcal{L}f''\big)(s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - 3s\end{aligned}$$

Ausserdem ist $\big(\mathcal{L}(e^t)\big)(s) = \frac{1}{s-1}$. Damit transformiert die Differentialgleichung unter der Laplacetransformation zu:

$$\begin{aligned} s^2F(s) - 3s - F(s) &= \frac{-2}{s-1} \\ \Leftrightarrow \quad \big(s^2 - 1\big)F(s) - 3s &= \frac{-2}{s-1} \\ \Leftrightarrow \quad (s-1)(s+1)F(s) &= \frac{3s^2 - 3s - 2}{s-1} \\ \Leftrightarrow \quad F(s) &= \frac{3s^2 - 3s - 2}{(s+1)(s-1)^2}\end{aligned}$$

Damit ist 1 eine doppelte Nullstelle des Nenners und -1 ist eine einfache Nullstelle. Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1}$$

durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} (s^2-1)A + (s+1)B + (s-1)^2 C &= 3s^2 - 3s - 2 \\ \Leftrightarrow (s^2-1)A + (s+1)B + (s^2-2s+1)C &= 3s^2 - 3s - 2 \\ \Leftrightarrow s^2(A+C) + s(B-2C) + (-A+B+C) &= 3s^2 - 3s - 2, \end{aligned}$$

also $A + C = 3$, $B - 2C = -3$ und $B + C - A = -2$. Durch Lösen dieses linearen Gleichungssystems berechnen wir $A = 2$, $B = -1$ und $C = 1$. Damit ist also

$$F(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s+1}$$

und die Rücktransformation ergibt:

$$f(t) = 2e^t - te^t + e^{-t}$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem (Nachrechnen!) zeigt, dass dies die korrekte Lösung ist.