Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 05.09.2017

Mathematik für Sicherheitsingenieure II (MScS, MScQ)

Modulteil: Mathematik II

Aufgabe 1. *(6+7+7 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(-3-i)\cdot(3+4i) \quad , \quad \frac{21+i}{2-3i} \quad , \quad \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des Polynoms $z^3 + z^2 + z + 1$.

c) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 = 1,$$

d.h. finden Sie die 4-ten Wurzeln von 1. Geben Sie diese sowohl in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, als auch in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
(-3-i)\cdot(3+4i) &= -9-12i-3i-4i^2 = -9+4-15i = -5-15i \\
\frac{21+i}{2-3i} &= (21+i)\cdot\frac{\overline{2-3i}}{|2-3i|^2} = (21+i)\cdot\frac{2+3i}{2^2+(-3)^2} \\
&= \frac{1}{13}(42+63i+2i-3) = \frac{1}{13}(39+65i) = 3+5i \\
\sqrt{2}e^{i3\pi/4} &= \sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4)+i\cdot\sin(3\pi/4)\big) = \sqrt{2}\big(-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}\big) = -1+i
\end{aligned}$$

b) Wir erraten zunächst die Nullstelle -1. Polynomdivision liefert dann:

$$(z^3+z^2+z+1):(z+1) = z^2+1$$

Nun findet man entweder direkt $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$ durch die dritte binomische Formel, oder bestimmt mit der (p, q)-Formel die Nullstellen i und $-i$ von $z^2 + 1$:

$$z_{1,2} = -\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0}{4}-1} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Somit ergibt sich die Linearfaktorzerlegung:

$$z^3+z^2+z+1 \quad = \quad (z+1)(z-i)(z+i)$$

c) Es gibt genau vier 4-te Wurzeln. Wegen $1 = e^{i2\pi}$ sind dies $e^{i\varphi}$ mit $\varphi = k\frac{2\pi}{4}$ für $k = 0, 1, 2, 3$. Also: $e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \{0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi\}$. In kartesischen Koordinaten sind dies die vier Zahlen $1, i, -1, -i$.

Aufgabe 2. *(11+3+3+3 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung von $f_0 : [-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = 2|x| - 2$.

a) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von f.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

c) Kann die komplexe Fourierreihe der Ableitung f' mit dem Differentiationssatz bestimmt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Gegen welche Grenzfunktion konvergiert die komplexe Fourierreihe von f aus Aufgabe a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) f hat die Periode $T = 2$ und damit die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = \pi$. Wir dürfen über ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$ der Länge 2 integrieren und erhalten mit partieller Integration die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1}\big(|x|-1\big)e^{-ik\pi x}dx \\
&= -\int_{-1}^{0} xe^{-ik\pi x}dx + \int_{0}^{1} xe^{-ik\pi x}dx - \int_{-1}^{1} e^{-ik\pi x}dx \\
&= -\frac{i}{k\pi}\Big[xe^{-ik\pi x} - \frac{i}{k\pi}e^{-ik\pi x}\Big]_{-1}^{0} + \frac{i}{k\pi}\Big[xe^{-ik\pi x} - \frac{i}{k\pi}e^{-ik\pi x}\Big]_{0}^{1} - \frac{i}{k\pi}\Big[e^{-ik\pi x}\Big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{i}{k\pi}\left(\frac{i}{k\pi} - e^{ik\pi} - \frac{i}{k\pi}e^{ik\pi} + e^{-ik\pi} - \frac{i}{k\pi}e^{-ik\pi} + \frac{i}{k\pi} - e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}\right) \\
&= \frac{i}{k\pi}\left(\frac{i}{k\pi} - (-1)^k - \frac{i}{k\pi}(-1)^k + (-1)^k - \frac{i}{k\pi}(-1)^k + \frac{i}{k\pi} - (-1)^k + (-1)^k\right) \\
&= \frac{i^2}{k^2\pi^2}\big(1 - (-1)^k - (-1)^k + 1\big) = \frac{2}{k^2\pi^2}\big((-1)^k - 1\big) = \begin{cases} \frac{-4}{k^2\pi^2} & , k \text{ ungerade }, \\ 0 & , k \text{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

für $k \neq 0$, und

$$c_0^*(f) = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(|x|-1)dx = -\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{1} xdx - 2 = -1$$

Somit ist die komplexe Fourierreihe von f:

$$f \sim c_0^*(f) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k\neq 0}} c_k^*(f)e^{ik\omega t} = -1 - \frac{4}{\pi^2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^2}e^{ik\pi t}$$

b) Da die Fourierkoeffizienten rein reell sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
f &\sim c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} 2\mathrm{Re}\; c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\; c_k^*(f)\sin(k\omega t) \\
&= -1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{k\geq 1 \\ k \text{ ungerade}}} \frac{1}{k^2}\cos(\pi k t)
\end{aligned}$$

c) Die komplexe Fourierreihe von f' kann mit dem Differentiationssatz bestimmt werden, da f stückweise stetig differenzierbar und stetig ist.

d) Da f stückweise stetig differenzierbar und stetig ist, konvergiert die Fourierreihe von f gegen f.

Aufgabe 3. *(10+3+4+3 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-2|x|}$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

b) Die Fouriertransformation von $f(x) = e^{-|x|}$ ist die Funktion $\widehat{f}(w) = \frac{2}{1+w^2}$. Verwenden Sie den Umkehrsatz der Fouriertransformation, um f unter Verwendung von $\hat{f}$ darzustellen.

c) Verwenden Sie Aufgabe b), um die Fouriertransformation von $\widehat{f}(w) = \frac{2}{1+w^2}$ zu bestimmen, ohne Integrale zu berechnen.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion $\widehat{f}(w) = \frac{1}{1+w^2}$ auf $\mathbb{R}$ absolut integrabel ist.

Lösung:

a) Mit partiellen Integrationen ist:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{2x}e^{-iwx}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2x}e^{-iwx}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(2-iw)x}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{(-2-iw)x}dx \\
&= \frac{1}{2-iw}\left[e^{(2-iw)x}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2+iw}\left[e^{(-2-iw)x}\right]_{0}^{+\infty}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{x\to-\infty}\left|e^{(2-iw)x}\right| = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty}\left|e^{(-2-iw)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$$

folgt weiter

$$\ldots = \frac{1}{2-iw} + \frac{1}{2+iw} = \frac{2+iw+2-iw}{(2-iw)(2+iw)} = \frac{4}{4+w^2}.$$

b) Nach dem Umkehrsatz ist

$$e^{-|x|} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(w)e^{iwx}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+w^2}e^{iwx}dw$$

c) Damit ergibt sich:

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+w^2}e^{-iwx}dw = 2\pi f(-x) = 2\pi e^{-|x|}$$

d) Dazu bestimmen wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{1+w^2} &= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dw}{1+w^2} + \int_{-1}^{1} \frac{dw}{1+w^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dw}{1+w^2} \\
&\leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{dw}{w^2} + \int_{-1}^{1} dw + \int_{1}^{+\infty} \frac{dw}{w^2} = [-w^{-1}]_{-\infty}^{-1} + 2 + [-w^{-1}]_{1}^{+\infty} = 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. *(5+15 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Laplacetransformierte der Funktion e^{3t}, also $\big(\mathcal{L}e^{3t}\big)(s)$. Für welche $s \in \mathbb{C}$ existiert $\big(\mathcal{L}e^{3t}\big)(s)$?

b) Bestimmen Sie unter Verwendung der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$-2f''(t) + 4f'(t) - 2f(t) = -6 \quad , \quad f(0) = 6 \quad , \quad f'(0) = 2.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung:

a) Die gesuchte Laplacetransformation

$$\big(\mathcal{L}e^{3t}\big)(s) = \int_0^{+\infty} e^{3t}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{(3-s)t}dt = \Big[\frac{e^{(3-s)t}}{3-s}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{3-s}\lim_{t\to+\infty} e^{(3-s)t} + \frac{1}{s-3}$$

existiert für $s \in \mathbb{C}$ mit Re $s > 3$. Für solche s ist $\big(\mathcal{L}e^{3t}\big)(s) = \frac{1}{s-3}$.

b) Es sei $F(s) := \big(\mathcal{L}f\big)(s)$ die Laplacetransformierte von f. Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{L}f'\big)(s) &= sF(s) - f(0) = sF(s) - 6 \\ \big(\mathcal{L}f''\big)(s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - 6s - 2 \end{aligned}$$

Ausserdem ist $\big(\mathcal{L}(-6)\big)(s) = -\frac{6}{s}$. Damit transformiert die Differentialgleichung unter der Laplacetransformation zu:

$$\begin{aligned} -2s^2F(s) + 12s + 4 + 4sF(s) - 24 - 2F(s) &= -\frac{6}{s} \\ \Leftrightarrow \quad -\big(2s^2 - 4s + 2\big)F(s) + 12s - 20 &= -\frac{6}{s} \\ \Leftrightarrow \quad -\big(2s^2 - 4s + 2\big)F(s) &= -\frac{6 + 12s^2 - 20s}{s} \\ \Leftrightarrow \quad F(s) = \frac{3 + 6s^2 - 10s}{s(s^2 - 2s + 1)} \quad \Leftrightarrow \quad F(s) &= \frac{3 + 6s^2 - 10s}{s(s-1)^2} \end{aligned}$$

Damit ist 1 eine doppelte Nullstelle des Nenners und 0 ist eine einfache Nullstelle. Wir bestimmen die Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s}$$

durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} s(s-1)A + sB + (s-1)^2C &= 6s^2 - 10s + 3 \\ \Leftrightarrow (s^2 - s)A + sB + (s^2 - 2s + 1)C &= 6s^2 - 10s + 3 \\ \Leftrightarrow s^2(A + C) + s(-A + B - 2C) + C &= 6s^2 - 10s + 3, \end{aligned}$$

also $A + C = 6$, $-A + B - 2C = -10$ und $C = 3$. Hieraus berechnen wir $C = 3$, $A = 3$ und $B = -1$. Damit ist also

$$F(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{3}{s}$$

und die Rücktransformation ergibt:

$$f(t) = 3e^t - te^t + 3$$