Priv.-Doz. Dr. J. Ruppenthal Wuppertal, 06.09.2016

Mathematik für Sicherheitsingenieure II (MScS, MScQ)

Modulteil: Mathematik II

Aufgabe 1. *(8+6+6 Punkte)*

a) Bringen Sie folgende komplexe Zahlen in die Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(2+3i)\cdot(1-4i) \quad , \quad \frac{4-4i}{2+2i} \quad , \quad \frac{1+7i}{3+i}$$

b) Zerlegen Sie das Polynom $z^2 + iz + 2$ in Linearfaktoren.

c) Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^5 = -32,$$

d.h. finden Sie die 5-ten Wurzeln von -32. Geben Sie diese in Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
(2+3i)\cdot(1-4i) &= 2 - 8i + 3i - 12i^2 = 2 - 5i + 12 = 14 - 5i \\[1em]
\frac{4-4i}{2+2i} &= (4-4i)\cdot\frac{\overline{2+2i}}{|2+2i|^2} = (4-4i)\cdot\frac{2-2i}{2^2+2^2} \\
&= (1-i)(1-i) = 1 - i - i + i^2 = -2i \\[1em]
\frac{1+7i}{3+i} &= (1+7i)\cdot\frac{\overline{3+i}}{|3+i|^2} = (1+7i)\cdot\frac{3-i}{3^2+1^2} \\
&= \frac{1}{10}(3 - i + 21i + 7) = 1 + 2i
\end{aligned}$$

b) Mit der (p, q)-Formel sind i und $-2i$ die Nullstellen des Polynoms:

$$z_{1,2} = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{\frac{i^2}{4} - 2} = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2}i \pm \frac{3}{2}i$$

Somit ist also:

$$z^2 + iz + 2 \quad = \quad (z-i)(z+2i)$$

c) Wegen $-32 = 32e^{i\pi}$ ist $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{e^{i\pi}} = 2e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \{\frac{\pi}{5}, 3\frac{\pi}{5}, \pi, 7\frac{\pi}{5}, 9\frac{\pi}{5}\}$.

Aufgabe 2. *(10+5+5 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodische Fortsetzung der Funktion $f_0 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = x^2$.

a) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von f.

b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von f.

c) Bestimmen Sie die komplexe Fourierreihe von f' mit dem Differentiationssatz.

Lösung:

a) f hat die Periode $T = 2$ und damit die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T = \pi$. Mit zweimaliger partieller Integration erhalten wir die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
c_k^*(f) &= \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-ik\omega x}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-ik\pi x}dx \\
&= \frac{1}{-2ik\pi}\big[x^2 e^{-ik\pi x}\big]_{-1}^{1} - \frac{2}{-2ik\pi}\int_{-1}^{1} xe^{-ik\pi x}dx \\
&= \frac{i}{2k\pi}\big(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}\big) - \frac{i}{k\pi}\int_{-1}^{1} xe^{-ik\pi x}dx \\
&= \frac{i}{2k\pi}\big((-1)^k - (-1)^k\big) - \frac{i}{-ik^2\pi^2}\big[xe^{-ik\pi x}\big]_{-1}^{1} + \frac{i}{-ik^2\pi^2}\int_{-1}^{1} e^{-ik\pi x}dx \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\big(e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}\big) + \frac{1}{ik^3\pi^3}\big[e^{-ik\pi x}\big]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}\big((-1)^k + (-1)^k\big) + \frac{1}{ik^3\pi^3}\big(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}\big) = \frac{2}{k^2\pi^2}(-1)^k
\end{aligned}$$

für $k \neq 0$, und

$$c_0^*(f) = \frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1}{6}\big[x^3\big]_{-1}^{1} = \frac{1}{6}\big(1+1\big) = \frac{1}{3}.$$

Somit ist die komplexe Fourierreihe von f:

$$f \sim c_0^*(f) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} c_k^*(f)e^{ik\omega t} = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} \frac{(-1)^k}{k^2}e^{ik\pi t}.$$

b) Da die Fourierkoeffizienten reell sind, ist die reelle Fourierreihe:

$$\begin{aligned}
f &\sim c_0^*(f) + \sum_{k\geq 1} 2\mathrm{Re}\ c_k^*(f)\cos(k\omega t) - 2\mathrm{Im}\ c_k^*(f)\sin(k\omega t) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(\pi k t)
\end{aligned}$$

c) Nach dem Differentiationssatz ist:

$$f' \sim i\omega\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^*(f)ke^{ik\omega t} = \frac{2i}{\pi}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}}\frac{(-1)^k}{k}e^{ik\omega t}$$

Aufgabe 3. *(15+5 Punkte)*

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & , \text{ für } -2 \leq x \leq 0, \\ 1 - x & , \text{ für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformation von f. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und bedenken Sie evtl. nötige Fallunterscheidungen.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x^2+1}$ auf $\mathbb{R}$ absolut integrabel ist.

Lösung:

a) Wir müssen die beiden Fälle $w = 0$ und $w \neq 0$ unterscheiden.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-2}^{0} (\frac{1}{2}x + 1)dx + \int_{0}^{1} (1-x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} xdx + 2 + 1 - \int_{0}^{1} xdx = -1 + 3 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Mit partiellen Integrationen ist für $w \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx = \int_{-2}^{0} \big(\frac{1}{2}x + 1\big)e^{-iwx}dx + \int_{0}^{1} \big(1-x\big)e^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} xe^{-iwx}dx + \int_{-2}^{1} e^{-iwx}dx - \int_{0}^{1} xe^{-iwx}dx \\
&= \frac{1}{-2iw}\big[xe^{-iwx}\big]_{-2}^{0} - \frac{1}{-2iw}\int_{-2}^{0} e^{-iwx}dx + \frac{1}{-iw}\big[e^{-iwx}\big]_{-2}^{1} \\
&\quad -\frac{1}{-iw}\big[xe^{-iwx}\big]_{0}^{1} + \frac{1}{-iw}\int_{0}^{1} e^{-iwx}dx \\
&= \frac{i}{w}e^{2iw} - \frac{1}{2i^2w^2}\big[e^{-iwx}\big]_{-2}^{0} + \frac{i}{w}e^{-iw} - \frac{i}{w}e^{2iw} \\
&\quad -\frac{i}{w}e^{-iw} + \frac{1}{i^2w^2}\big[e^{-iwx}\big]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{2w^2}\big[e^{-iwx}\big]_{-2}^{0} - \frac{1}{w^2}\big[e^{-iwx}\big]_{0}^{1} = \frac{1}{w^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2iw} - e^{-iw} + 1\right) \\
&= \frac{1}{w^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{2iw} - e^{-iw}\right) = \frac{3}{2w^2} - \frac{1}{2w^2}\big(e^{2iw} + 2e^{-iw}\big)
\end{aligned}$$

b) Wegen $|\sin(x)\cos(x)| = |\sin(x)||\cos(x)| \leq 1$ ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin^2(x)}{x^2+1}\right| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} \\
&\leq \int_{-\infty}^{-1} x^{-2}dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{+\infty} x^{-2}dx = \big[-x^{-1}\big]_{-\infty}^{-1} + 2 + \big[-x^{-1}\big]_{1}^{+\infty} \\
&= 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} + 2 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + 1 = 4 < \infty
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. *(20 Punkte)*

Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplacetransformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$f''(t) + 2f'(t) - 3f(t) = 2 \quad , \quad f(0) = 3 \quad , \quad f'(0) = 1.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung:

Es sei $F(s) := \big(\mathcal{L}f\big)(s)$ die Laplacetransformierte von f. Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{L}f'\big)(s) &= sF(s) - f(0), \\ \big(\mathcal{L}f''\big)(s) &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{L}f'\big)(s) &= sF(s) - 3, \\ \big(\mathcal{L}f''\big)(s) &= s^2F(s) - 3s - 1. \end{aligned}$$

Ausserdem ist $\big(\mathcal{L}2\big)(s) = \frac{2}{s}$.

Damit transformiert die Differentialgleichung unter der Laplacetransformation zu:

$$\begin{aligned} s^2F(s) - 3s - 1 + 2sF(s) - 6 - 3F(s) &= \frac{2}{s} \\ \Leftrightarrow \quad (s^2 + 2s - 3)F(s) - 3s - 7 &= \frac{2}{s} \\ \Leftrightarrow \quad (s^2 + 2s - 3)F(s) &= \frac{2}{s} + 3s + 7 \\ \Leftrightarrow \quad F(s) &= \frac{3s^2 + 7s + 2}{s(s^2 + 2s - 3)} \end{aligned}$$

Dier Nullstellen von $s^2 + 2s - 3$ ergeben sich durch die (p, q)-Formel:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2,$$

so dass $s^2 + 2s - 3 = (s-1)(s+3)$ und

$$F(s) \quad = \quad \frac{3s^2 + 7s + 2}{s(s-1)(s+3)} =: \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

Mit $Q(s) = s^3 + 2s^2 - 3s$, also $Q'(s) = 3s^2 + 4s - 3$ liefert die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{P(0)}{Q'(0)} \cdot \frac{1}{s} + \frac{P(1)}{Q'(1)} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{P(-3)}{Q'(-3)} \cdot \frac{1}{s+3} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{12}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{s+3} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} + 3 \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Damit ist nach Rücktransformation also:

$$f(t) \quad = \quad -\frac{2}{3} + 3e^t + \frac{2}{3}e^{-3t}.$$