**Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort** **1.9.2015**
**Bergische Universität Wuppertal**

# Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScQ, MScS)

**Aufgabe 1**

**a)** Berechnen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^2 - (1+3j)z = 2 - 2j.$$

(10 Pkte)

Hinweis: Was ist $(1-j)^2$?

**b)** Gegeben sei das trigonometrische Polynom

$$p(t) = A + B\cos(t) + C\sin(t) - \sin(3t)\,.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten $A$, $B$ und $C$ so, dass

$$p(0) = p\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{ und } p(\pi) = 2$$

erfüllt ist.

(10 Pkte)

*Lösung* . a) Die quadratische Ergänzung ist hier $(\frac{1+3j}{2})^2 = \frac{-4+3j}{2}$, also wird die Gleichung zu $\left(z - \frac{1+3j}{2}\right)^2 = -\frac{j}{2} = (\frac{1-j}{2})^2$ äquivalent. Somit

$$z_{1,2} = \frac{1+3j}{2} \pm \frac{1-j}{2}, \qquad z_1 = 1+j,\, z_2 = 2j$$

b) Die Koeffizienten erfüllen die Bedingung

$$A + B = p(0) = 0$$
$$A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}\sqrt{3}C = p(\frac{\pi}{3}) = 0$$
$$A - B = p(\pi) = 2$$

Es folgt $A = 1, B = -1$ und $C = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Aufgabe 2**

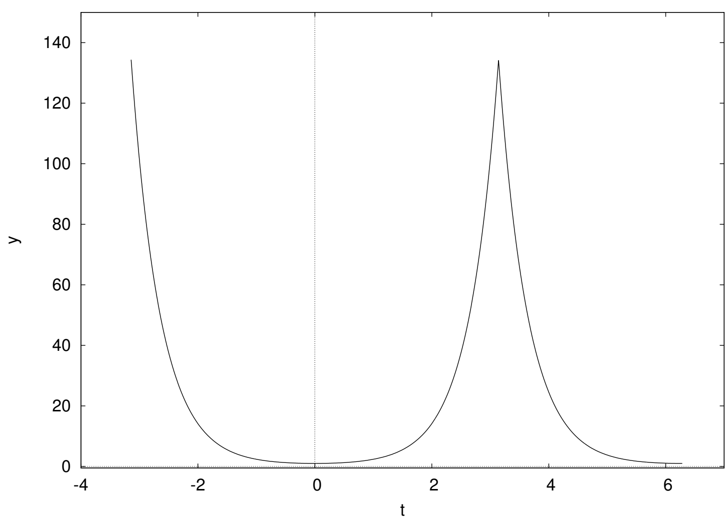
Es sei $x(t) := \cosh^2(t) = \frac{1}{4}(e^{2t} + 2 + e^{-2t})$ auf $[-\pi, \pi]$ und $x$ werde $(2\pi)$-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie den Graphen von $x$ auf $[-\pi, 2\pi]$ (5 Pkte)

b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von $x(t)$ (10 Pkte)

c) Konvergiert diese Reihe punktweise gegen $x(t)$? (Antwort begründen) (5 Pkte)

*Lösung .* a) Hier ist die Skizze




b) $x$ ist gerade, also haben wir eine Fourierreihe der Form $x \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$, mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos(kt)dt$$

Es gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)dt = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{2t} + 2 + e^{-2t}dt\right) \\ &= \frac{1}{8\pi}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi} + 8\pi - e^{-2\pi} + e^{2\pi}\right) = 1 + \frac{1}{2\pi}\sinh(2\pi) \end{aligned}$$

und für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} 4\pi a_k &= \int_{-\pi}^{\pi}(e^{2t} + 2 + e^{-2t})\cos(kt)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t}\cos(kt)dt + 2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2t}\cos(kt)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t}\cos(kt)dt + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2t}\cos(kt)dt \\ &= 2\int_{-\pi}^{\pi} e^{2t}\cos(kt)dt \end{aligned}$$

denn das 2. Integral ist (wie man mit der Substitution $t := -s$ sieht) gleich dem 1. Integral. Der Formelsammlung entnehmen wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{2t}\cos(kt)dt = e^{2t}\frac{2\cos(kt)+k\sin(kt)}{4+k^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2e^{2\pi}\frac{(-1)^k}{4+k^2} - 2e^{-2\pi}\frac{(-1)^k}{4+k^2} = 4(-1)^k\frac{\sinh(2\pi)}{4+k^2}$$

Somit

$$a_k = \frac{2}{\pi}\sinh(2\pi)\frac{(-1)^k}{4+k^2}$$

c) Die Antwort ist "Ja", denn $x$ ist überall stetig und hat überall rechts-und linksseitige Ableitungen. Der Konvergenzsatz der Vorlesung ist anwendbar. Somit

$$x(t) = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2\pi}\cosh(2\pi)) + \frac{2}{\pi}\sinh(2\pi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4+k^2}\cos(kt)$$

**Aufgabe 3**

Es sei $f(x) := \dfrac{x}{4} + 2$, für $-8 \le x \le -4$ und $f(x) := 1$, wenn $|x| \le 4$, und weiter $f(x) = 2 - \dfrac{x}{4}$, für $4 \le x \le 8$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus [-8, 8]$ sei $f(x) := 0$.

a) Berechnen Sie $\widehat{f}(\omega)$ (Denken Sie an eine Fallunterscheidung bezüglich $\omega$, wenn nötig!) (8 Pkte)

b) Sei $g(x) := \dfrac{\cos(8x) - \cos(4x)}{x^2}$, für $x \neq 0$ und $g(0) := -24$. Ist dann $g$ integrabel ? (Antwort begründen) (6 Pkte)

c) Ist $g$ bandbegrenzt? (Antwort begründen) (4 Pkte)

d) Ist die Schrittweite $a = \dfrac{1}{12}$ geeignet, um $g$ aus den Werten $g(2\pi ka), k \in \mathbb{Z}$, mittels des Abtasttheorems rekonstruieren zu können? (2 Pkte)

*Lösung*. a) Es ist für $\omega \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int_{-8}^{8} f(x) e^{-j\omega x} dx = \int_{-8}^{8} f(x)\cos(\omega x) dx, \quad f \text{ ist gerade, also } \int_{-8}^{8} f(x)\sin(\omega x) dx = 0 \\
&= 2\int_{0}^{8} f(x)\cos(\omega x) dx, \quad \text{wieder, weil } f \text{ gerade ist,} \\
&= 2\int_{0}^{4} \cos(\omega x) dx + 2\int_{4}^{8} (2 - \frac{x}{4}) \cos(\omega x) dx \\
&= 2\frac{\sin(4\omega)}{\omega} + 2\Big( (2 - \frac{x}{4}) \frac{\sin(\omega x)}{\omega}\Big|_4^8 + \frac{1}{4}\int_4^8 \frac{\sin(\omega x)}{\omega} dx \Big) \\
&= \frac{1}{2}\int_4^8 \frac{\sin(\omega x)}{\omega} dx = -\frac{1}{2\omega^2}\cos(\omega x)\Big|_4^8 \\
&= -\frac{1}{2\omega^2}\big( \cos(8\omega) - \cos(4\omega) \big)
\end{aligned}
$$

Leicht errechnen wir, dass $\widehat{f}(0) = 12$.

b) $g$ ist nahe 0 stetig, und für $|x| > 1$ haben wir $|g| \le x^{-2}$. Also ist $g$ absolut integrabel.

c) Da $g = -2\widehat{f}$, liefert die Umkehrformel $\widehat{g}(x) = -4\pi f(-x) = 0$ außerhalb $[-8, 8]$.

d) $a$ dürfte nicht größer als $\frac{1}{16}$ sein, also ist das Shannon-Theorem nicht anwendbar.

**Aufgabe 4**
Gegeben sei das lineare DGL-System

$$\begin{aligned} {y_1}' &= -10y_1 + 12y_2 \\ {y_2}' &= -9y_1 + 14y_2 \end{aligned}$$

mit den Startbedingungen $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 2$.

a) Welches lineare Gleichungssystem müssen dann die Laplacetransformierten $Y_1 := \mathscr{L}(y_1)$ und $Y_2 := \mathscr{L}(y_2)$ lösen?

(7 Pkte)

b) Berechnen Sie $Y_1$ und $Y_2$ (5 Pkte)

c) Berechnen Sie $y_1$ und $y_2$ (8 Pkte)

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

*Lösung* . a) Unter Laplacetransformation geht $y_1'$ in $sY_1(s) + 1$ und $y_2'$ in $sY_2(s) - 2$ über. Es folgt

$$sY_1(s) + 1 = -10Y_1(s) + 12Y_2(s)$$

$$sY_2(s) - 2 = -9Y_1(s) + 14Y_2(s)$$

oder äquivalent:

$$(s + 10)Y_1(s) - 12Y_2(s) = -1$$

$$9Y_1(s) + (s - 14)Y_2(s) = 2$$

b) Es folgt (Cramerregel)

$$Y_1(s) = \frac{-s + 38}{s^2 - 4s - 32}, \qquad Y_2(s) = \frac{2s + 29}{s^2 - 4s - 32}$$

Es ist dann wegen $s^2 - 4s - 32 = (s + 4)(s - 8)$

$$Y_1(s) = \frac{A}{s + 4} + \frac{B}{s - 8}, \qquad Y_2(s) = \frac{C}{s + 4} + \frac{D}{s - 8}$$

mit

$$A = \lim_{s \to -4} (s + 4)Y_1(s) = -\frac{7}{2}, \qquad B = \lim_{s \to 8} (s - 8)Y_1(s) = \frac{5}{2}$$

$$C = \lim_{s \to -4} (s + 4)Y_2(s) = -\frac{7}{4}, \qquad D = \lim_{s \to 8} (s - 8)Y_2(s) = \frac{15}{4}$$

c) Aus $Y_1(s) = -\dfrac{7/2}{s + 4} + \dfrac{5/2}{s - 8}$ folgt

$$y_1(t) = -\frac{7}{2}e^{-4t} + \frac{5}{2}e^{8t}$$

Entsprechend folgt aus $Y_2(s) = -\dfrac{7/4}{s + 4} + \dfrac{15/4}{s - 8}$, dass

$$y_2(t) = -\frac{7}{4}e^{-4t} + \frac{15}{4}e^{8t}$$