Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **2.9.2014**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 + 5z^2 + 4 = 0.$$

b) Gegeben sei das trigonometrische Polynom zweiten Grades

$$p(t) = 2 - \cos(t) + \sin(t) + A\cos(2t) + B\sin(2t).$$

Bestimmen sie die Koeffizienten A und B so, dass

$$p(0) = 0 \text{ und } p\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

erfüllt ist.
Geben Sie $p(t)$ in der Form

$$p(t) = c_0 + c_1 e^{jt} + c_{-1}e^{-jt} + c_2 e^{2jt} + c_{-2}e^{-2jt}$$

mit geeigneten Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ an. Dabei sollen die Koeffizienten in der kartesischen Form, d. h. in der Form $a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmt werden.

c) Gegeben sei die Funktion $g(t) = \sin t$ für $t \in [0, \pi]$. Skizzieren Sie die gerade Fortsetzung von $g(t)$ und geben Sie die Funktionsvorschrift der geraden Fortsetzung an.

Lösung. Zu a) Es gilt

$$z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 4)(z^2 + 1) = (z - 2j)(z + 2j)(z - j)(z + j)$$

Somit sind die Lösungen durch $\pm j, \pm 2j$ gegeben.

Zu b) Es gilt $p(0) = A + 1$, also wählen wir $A = -1$. Weiter ist $p(\frac{\pi}{4}) = 2 + B$, also muss $B = 0$ sein, soll $p(\frac{\pi}{4}) = 2$ werden. Das führt auf

$$\begin{aligned} p(t) &= 2 - \cos t + \sin t - \cos(2t) \\ &= 2 - \frac{1}{2}(1 + j)e^{jt} - \frac{1}{2}(1 - j)e^{-jt} - \frac{1}{2}e^{2jt} - \frac{1}{2}e^{-2jt} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$x(t) = e^{-|t|}, \quad t \in (-\pi, \pi].$$

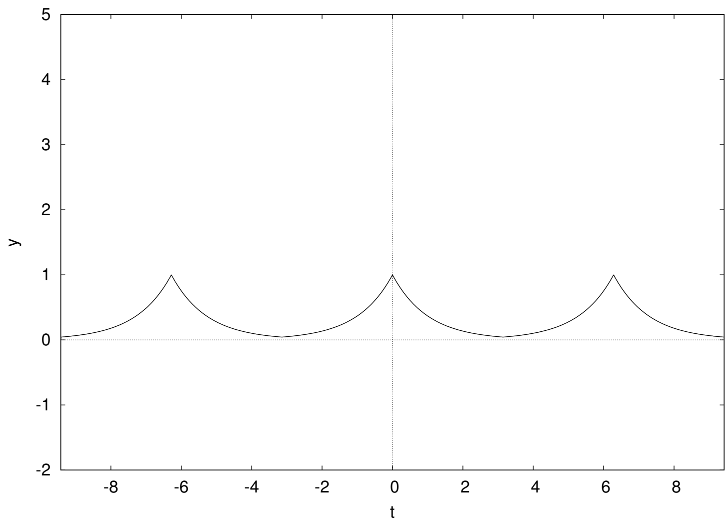
$x(t)$ werde 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Bestimmen Sie die Fourierreihe von $x(t)$. Berechnen Sie dazu die Koeffizienten der Fourierreihe von $x(t)$ in komplexer Form. Fassen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich zusammen. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

c) Berechnen Sie die periodische Faltung von $x(t)$ mit $y(t) = e^{jt}$.

Lösung. Zu a) Hier ist der Graph von $x(t)$:



Zu b) Die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-jkt}dt$ werden so berechnet

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-|t|-jkt}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-(1+jk)t}dt + \int_{-\pi}^{0} e^{(1-jk)t}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-(1+jk)t}}{-(1+jk)}\Big|_0^{\pi} + \frac{e^{(1-jk)t}}{(1-jk)}\Big|_{-\pi}^{0}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{1+jk} + \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{1-jk}\right) = \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}
\end{aligned}$$

So finden wir

$$x(t) \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1-(-1)^k e^{-\pi}}{\pi(1+k^2)}\, e^{jkt}$$

Zu c) Der Faltungssatz für Fourierreihen ergibt, dass

$$x * y(t) = c_1 e^{jt} = \frac{1+e^{-\pi}}{2\pi} e^{jt}\,,$$

da die Fourierkoeffizienten d_k von y gegeben sind durch $d_1 = 1$ und $d_k = 0$ für $k \neq 1$.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$x(t) = \begin{cases} 1+t & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ 1-\frac{1}{2}t & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

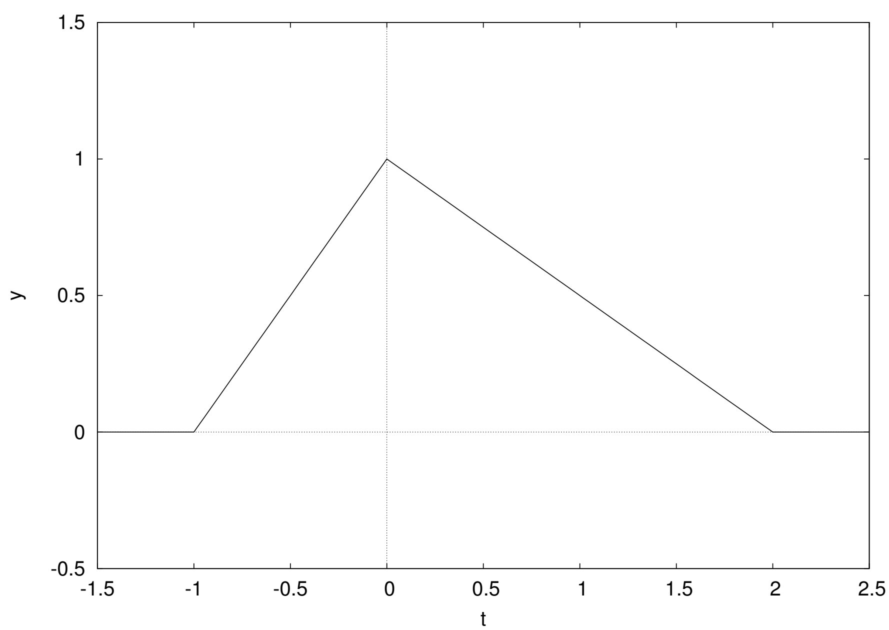
a) Skizzieren Sie die Funktion.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $x(t)$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an und beachten Sie die nötigen Fallunterscheidungen.

c) Skizzieren Sie die Funktionen $x_1(t) = x(t-3)$ und $x_2(t) = x\left(\frac{1}{2}t\right)$ und bestimmen Sie aus dem Ergebnis zu b) mit Hilfe geeigneter Korrespondenzen und Rechenregeln die Fouriertransformierten von $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Lösung. Zu a)

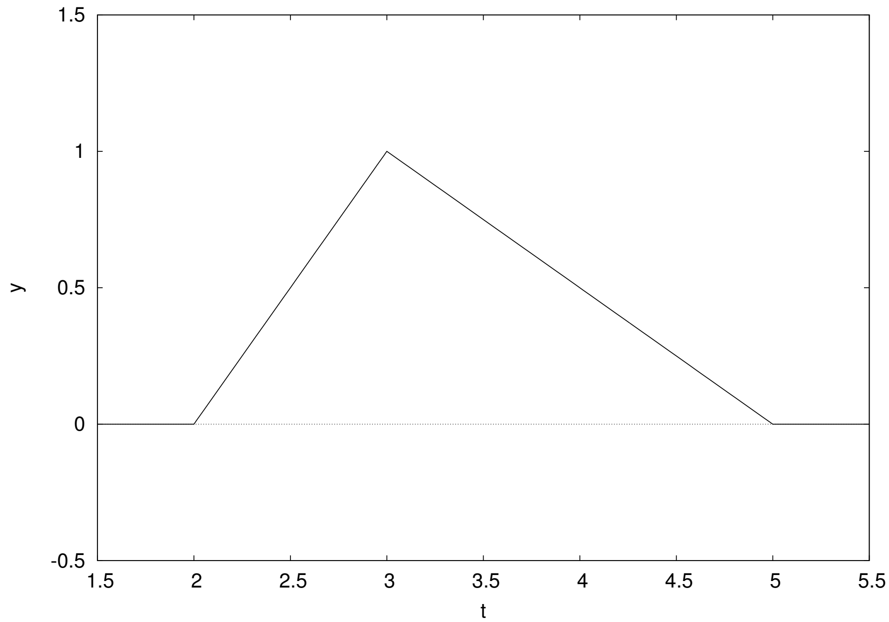
Hier ist der Graph von $x(t)$:



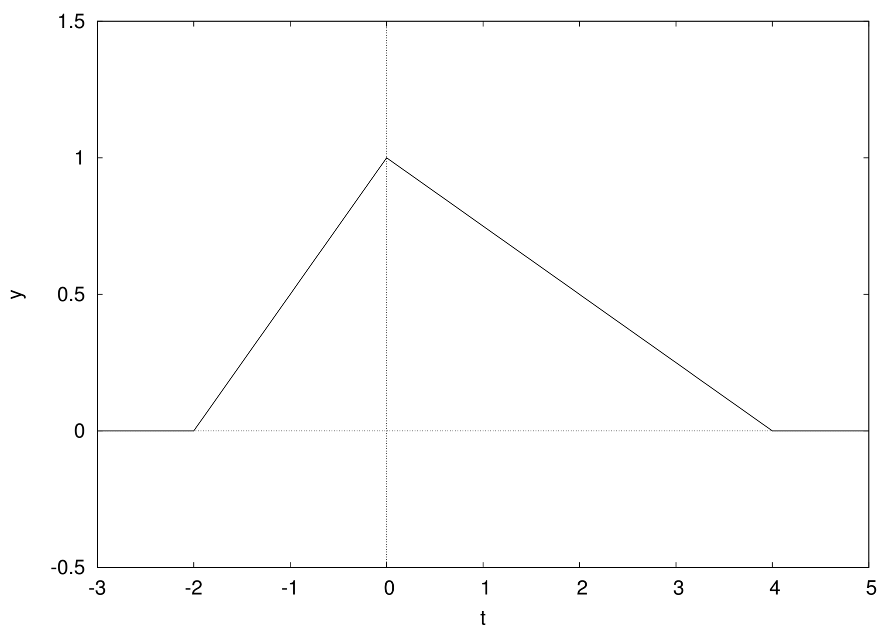
Zu b) Es gilt $\widehat{x}(0) = \frac{3}{2}$ und für $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(\omega) &= \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{2} (1-\frac{t}{2})e^{-j\omega t}dt \\
&= -\frac{1}{j\omega}(1+t)e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{\omega^2}e^{-j\omega t}\Big|_{-1}^{0} \\
&\quad -\frac{1}{j\omega}(1-\frac{t}{2})e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{2} - \frac{1}{2\omega^2}e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{2} \\
&= -\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{\omega^2}(e^{j\omega}-1) + \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2\omega^2}(e^{-2j\omega}-1) \\
&= \frac{3}{2\omega^2} - \frac{1}{2\omega^2}(2e^{j\omega} + e^{-2j\omega})
\end{aligned}$$

Zu c) Graph von $x_1(t)$:



und von $x_2(t)$:



Mit dem Translations- bzw. dem Dilatationssatz folgt

$$\widehat{x}_1(\omega) = e^{-3j\omega} X(\omega), \qquad \widehat{x}_2(\omega) = 2X(2\omega)$$

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t^2 + 3t\,, \quad x(0) = 0\,, \quad x'(0) = 0.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung. Ist $X(s)$ die Laplacetransformierte zu x, so haben wir wegen $x(0) = x'(0) = 0$

$$\mathcal{L}(x') = sX(s), \qquad \mathcal{L}(x') = s^2 X(s)$$

Somit ist X Lösung zur Gleichung

$$(s^2+3s+2)X(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2}$$

Somit ist

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{3}{s^2}\right) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s+1} + \frac{E}{s+2}$$

Dann wird

$$C = \lim_{s\to 0} s^3 X(s) = 1$$

$$D = \lim_{s\to -1} (s+1)X(s) = 1$$

$$E = \lim_{s\to -2} (s+2)X(s) = -\frac{1}{2}$$

Aus $X(1) = \frac{5}{6}$ folgt

$$\frac{5}{6} = A + B + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \qquad A + B = -\frac{1}{2}$$

Aus $X(2) = \frac{1}{12}$ folgt

$$\frac{1}{12} = \frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8}, \qquad \frac{A}{2} + \frac{B}{4} = -\frac{1}{4}$$

Das führt auf $A = -1/2, B = 0$. Somit erhalten wir

$$X(s) = \frac{-1}{2s} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)}$$

und

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$