Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **3.9.2013**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$w^4 = 16e^{j\pi}$$

und geben Sie die Lösungen in kartesischer Form an.

b) Gegeben sei das trigonometrische Polynom $p(t) = 1 + 3\sin t - 2\cos t + \sin(2t) + A\cos(2t)$. Bestimmen Sie A so, dass $p(\frac{\pi}{3}) = 0$ gilt.

c) Geben Sie das Polynom $q(t) = 2 + \sin t - 2\cos t + 2\sin(2t) + \cos(2t)$ in der Form

$$q(t) = c_0 + c_1e^{jt} + c_{-1}e^{-jt} + c_2e^{2jt} + c_{-2}e^{-2jt}$$

mit geeigneten Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ an. Die Koeffizienten sollen in kartesischer Form, d.h. in der Form $a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ bestimmt werden.

Lösung. a) Ist w_1 eine Lösung, so auch $j^k w_1$ für $k = 1, 2, 3$, denn $j^4 = 1$. Wir wählen $w_1 = 2e^{j\pi/4} = 2(\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}(1 + j)$. Die anderen Lösungen sind nun $w_2 := jw_1 = \sqrt{2}(-1 + j)$, $w_3 = -w_1 = -\sqrt{2}(1 + j)$ und $w_3 = -jw_1 = \sqrt{2}(1 - j)$.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} p(\frac{\pi}{3}) &= 1 + 3\sin(\pi/3) - 2\cos(\pi/3) + \sin(2\pi/3) + A\cos(2\pi/3) \\ &= 1 + 3\sin(\pi/3) - 1 + \sin(\pi/3) - A\cos(\pi/3) \\ &= 4\sin(\pi/3) - A\cos(\pi/3) \\ &= 2\sqrt{3} - A/2 \end{aligned}$$

Also müssen wir $A = 4\sqrt{3}$ wählen.

c) Wir formen um:

$$\begin{aligned} q(t) &= 2 + \sin t - 2\cos t + 2\sin(2t) + \cos(2t) \\ &= 2 + \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} - (e^{jt} + e^{-jt}) + \frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{j} + \frac{1}{2}(e^{2jt} + e^{-2jt}) \\ &= 2 + (\frac{1}{2j} - 1)e^{jt} - (\frac{1}{2j} + 1)e^{-jt} + (\frac{1}{j} + \frac{1}{2})e^{2jt} + (-\frac{1}{j} + \frac{1}{2})e^{-2jt} \end{aligned}$$

Die gewünschten komplexen Koeffizienten sind also

$$c_0 = 2,\ c_1 = -\frac{j}{2} - 1,\ \ c_{-1} = \frac{j}{2} - 1, \quad c_2 = \frac{1}{2} - j,\ c_{-2} = \frac{1}{2} + j$$

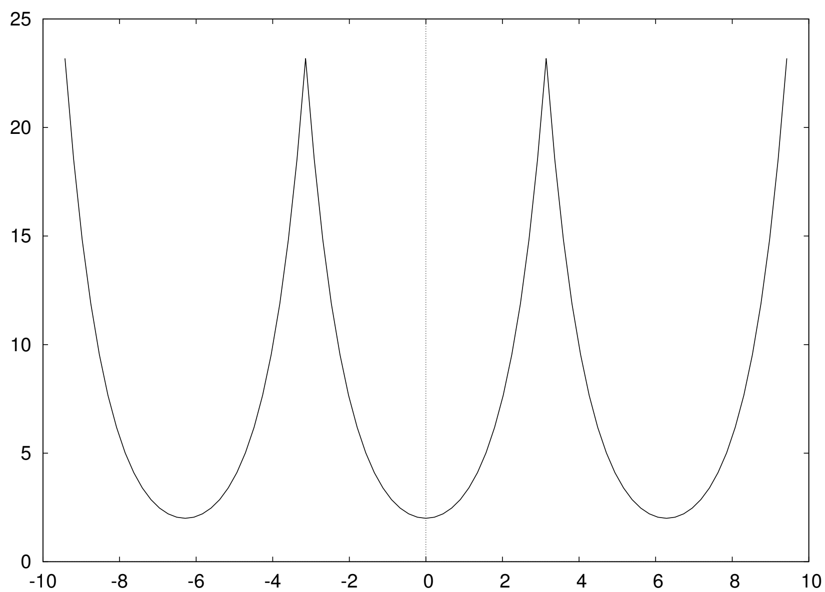
Aufgabe 2 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $x(t) = 2\cosh(t)$, für $t \in (-\pi, \pi]$, $x(t)$ werde 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $x(t)$ auf $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Berechnen Sie die Fourierreihe von x in komplexer Form. Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung .

a) Der Graph von x ist wie folgt:



b) Für ganzzahliges k sei

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jkt} dt$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(t) dt = \frac{1}{\pi}(\sinh(\pi) - \sinh(-\pi)) = \frac{2}{\pi} \sinh(\pi).$$

und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} 2\pi c_k &= \int_{-\pi}^{\pi} (e^t + e^{-t}) e^{-jkt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{(1-jk)t} + e^{-(1+jk)t}) dt \\ &= \frac{1}{1-jk}(e^{(1-jk)\pi} - e^{-(1-jk)\pi}) - \frac{1}{1+jk}(e^{-(1+jk)\pi} - e^{(1+jk)\pi}) \\ &= 2(-1)^k \frac{(1}{1-jk} + \frac{1}{1+jk}) \sinh(\pi) = \frac{4(-1)^k}{1+k^2} \sinh(\pi) \end{aligned}$$

also

$$c_k = \frac{2(-1)^k}{\pi} \sinh(\pi)$$

und die komplexe Fourierreihe von x ist dann

$$x \approx \frac{2\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^k}{1+k^2} e^{jkt}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$x(t) := \begin{cases} |\sin t| & , \text{ wenn } -\pi/2 \le t \le \pi/2 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $x(t)$. Geben Sie dabei den vollständigen Lösugsweg an und beachten Sie die nötigen Fallunterscheidungen.

b) Bestimmen Sie aus dem Ergebnis zu a) mit Hilfe geeigneter Korrespondenzen und Rechenregeln die Fouriertransformierte zu $\widetilde{x}(t) := e^{jt}x(t)$.

Lösung . a) Wir rechnen aus

$$\begin{aligned} \widehat{x}(\omega) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| \cos(\omega t) dt - j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| \sin(\omega t) dt \\ &= 2 \int_{0}^{\pi/2} \sin t \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

Angenommen, es sei $\omega^2 \neq 1$. Dann ist

$$\sin((\omega+1)t) = \sin t \, \cos(\omega t) + \cos t \, \sin(\omega t)$$

$$\sin((\omega-1)t) = -\sin t \, \cos(\omega t) + \cos t \, \sin(\omega t)$$

also

$$\sin t \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(\sin((\omega+1)t) - \sin((\omega-1)t)\,)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \widehat{x}(\omega) &= 2 \int_{0}^{\pi/2} \sin t \cos(\omega t) dt \\ &= \int_{0}^{\pi/2} \sin((\omega+1)t) dt - \int_{0}^{\pi/2} \sin((\omega-1)t) dt \\ &= \frac{1}{\omega+1} \left(1 - \cos((\omega+1)\frac{\pi}{2})\right) - \frac{1}{\omega-1} \left(1 - \cos((\omega-1)\frac{\pi}{2})\right) \end{aligned}$$

Ist $\omega \in \{-1, 1\}$, so wird

$$\widehat{x}(\omega) = 2 \int_{0}^{\pi/2} \sin t \cos(t) dt = \int_{0}^{\pi/2} \sin(2t) dt = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi)) = 1$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\widetilde{x}}(\omega) &= \widehat{x}(\omega - 1) \\ &= \frac{1}{\omega} \left(1 - \cos(\omega\frac{\pi}{2})\right) - \frac{1}{\omega-2} \left(1 - \cos((\omega-2)\frac{\pi}{2})\right) , \end{aligned}$$

sofern $\omega \notin \{0, 2\}$. Weiter ist $\widehat{\widetilde{x}}(\omega) = 1$, wenn $\omega \in \{0, 2\}$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = e^{-2t}, \qquad x(0) = 0,\ x'(0) = 2.$$

Geben Sie dabei den vollständigen Lösungsweg an.

Lösung. Die Laplace-Transformierte $X(s)$ der Lösung $x(t)$ erfüllt die Gleichung

$$s^2X(s) - 2 + 5sX(s) + 6X(s) = \frac{1}{s+2}$$

also

$$X(s) = \frac{\frac{1}{s+2} + 2}{s^2 + 5s + 6} = \frac{1 + 2(s+2)}{(s+2)^2(s+3)}$$

Wir machen als Ansatz:

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+3}$$

und berechnen die Koeffizienten:

$$C = \lim_{s \to -3}(s+3)X(s) = -1, \qquad B = \lim_{s \to -2}(s+2)^2 X(s) = 1$$

Weiter haben wir

$$\frac{5}{12} = X(0) = \frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{C}{3} = \frac{A}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

und damit

$$A = 2(\frac{5}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}) = 1$$

Das ergibt

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+3}$$

und damit durch Rücktransformation

$$x(t) = e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t} = (1+t)e^{-2t} - e^{-3t}$$