Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **28.8.2012**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)
a) Berechnen Sie alle 3. Wurzeln aus 1 in kartesischen Koordinaten.

b) Sei $w = -26 - 18j$. Dann ist $z_1 = 1 + 3j$ eine 3. Wurzel aus w. Berechnen Sie die beiden anderen 3. Wurzeln aus w.

c) Schreiben Sie $f(t) := \cos^2 t \sin t$ als reelles trigonometrisches Polynom.

Lösung . a) Es gilt $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$. Die beiden anderen 3. Wurzeln aus 1 sind also die Lösungen zur quadratischen Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$. Das sind $\zeta_{2,3} := \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$.

b) Es ist

$$z_2 := \zeta_2 z_1 = \frac{-1 - 3\sqrt{3}}{2} + \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}\, j$$
$$z_3 := \zeta_3 z_1 = \frac{-1 + 3\sqrt{3}}{2} - \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\, j$$

c) Es gilt $\cos t := \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$ und $\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$, also

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}\right)^2 \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \\ &= \frac{(e^{2jt} + 2 + e^{-2jt})(e^{jt} - e^{-jt})}{8j} \\ &= \frac{e^{3jt} + e^{jt} - e^{-jt} - e^{-3jt}}{8j} \\ &= \frac{1}{4}(\sin(3t) + \sin t) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Es sei
$$x(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{, wenn} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{, wenn} \quad t \in [-\frac{3}{2}, -1] \cup [1, \frac{3}{2}) \end{cases}$$
eine mit Periode $T = 3$ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzte Funktion.

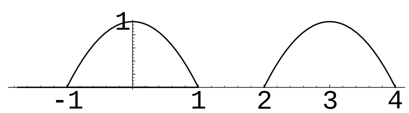
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $x(t)$ auf $[-3/2,\, 9/2]$.

b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von x.

c) Wird x durch seine Fourierreihe dargestellt? (Antwort begründen)

Lösung .

a) Der Graph von x ist wie folgt:



b) Für ganzzahliges k sei
$$c_k := \frac{1}{3} \int_{-3/2}^{3/2} x(t) e^{-jkt} dt$$
Dann ist mit $\omega := \frac{2\pi}{3}$:
$$c_0 = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (1 - t^2) dt = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{9}$$
und für $k \neq 0$
$$\begin{aligned}
3c_k &= \int_{-1}^{1} (1 - t^2) e^{-j\omega kt} dt\,, \\
&= \frac{j}{\omega k} \left((1 - t^2) e^{-jkt} \Big|_{-1}^{1} + 2 \int_{-1}^{1} t e^{-j\omega kt} dt \right) \\
&= \frac{j}{\omega k} \left((1 - t^2) e^{-jkt} \Big|_{-1}^{1} + 2(\frac{j}{\omega k}) t e^{-j\omega kt} \Big|_{-1}^{1} - 2(\frac{j}{\omega k})^2 e^{-j\omega kt} \Big|_{-1}^{1} \right) \\
&= \frac{2j}{\omega k} \left((\frac{j}{\omega k}) t e^{-j\omega kt} \Big|_{-1}^{1} - (\frac{j}{\omega k})^2 e^{-j\omega kt} \Big|_{-1}^{1} \right) \\
&= \frac{2j}{\omega k} \left((\frac{j}{\omega k})(e^{-j\omega k} + e^{j\omega k}) + (\frac{j}{\omega k})^2 (e^{j\omega k} - e^{-j\omega k} \right) \\
&= \frac{-4}{(\omega k)^2} \cos(\omega k) + \frac{4}{(\omega k)^3} \sin(\omega k)
\end{aligned}$$
also
$$c_k = \frac{4}{3(\omega k)^2} \left(\frac{1}{\omega k} \sin(\omega k) - \cos(\omega k) \right)$$

und die reelle Fourierreihe von x ist dann

$$x \approx \frac{4}{9} + \frac{8}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega k)^2} \left(\frac{1}{\omega k} \sin(\omega k) - \cos(\omega k) \right) \cos(\omega k t)$$

b) Da $|c_k| \leq \frac{2}{k}$ für alle $k \neq 0$ und x stetig ist, konvergiert die Fourierreihe von x überall.

Aufgabe 3 (20 Punkte)
a) Gegeben seien die positiven Zahlen a und b mit $a > b$.

Angenommen, es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, absolut integrable Funktion, die die Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-at^2} dt = e^{-bx^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ löst. Wie muss dann ein expliziter Ausdruck für f aussehen?

Man denke an den Faltungssatz und die Umkehrformel.

b) Angenommen, die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ habe die Fouriertransformierte $\widehat{g}(\omega) = 1 - 2\omega^2$, für $|\omega| < 1/\sqrt{2}$ und $\widehat{g}(\omega) = 0$, wenn $|\omega| \geq 1/\sqrt{2}$. Ferner konvergiere die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(\frac{\pi n}{2})|$. Kann man dann die Funktion g aus den Werten $g(\frac{\pi n}{2})$ mit dem Abtastsatz rekonstruieren?

Lösung. Zu a) Wir setzen $g_k(x) = e^{-k\,x^2}$ für $k > 0$. Dann lautet die Integralgleichung so:

$$f * g_a = g_b \,.$$

Sei f eine solche Lösung der Integralgleichung. Ihre Fouriertransformierte $\widehat{f}$ erfüllt dann

$$\widehat{f} \widehat{g_a} = \widehat{g_b}$$

Nun gilt aber

$$\widehat{g_k}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4k}}$$

Also folgt

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\widehat{g_b}}{\widehat{g_a}}(\omega) = \sqrt{\frac{a}{b}}\, e^{(\frac{1}{4a} - \frac{1}{4b})\omega^2} = \sqrt{\frac{a}{b}}\, e^{-\frac{1}{4c}\,\omega^2} = \sqrt{\frac{ac}{b\pi}}\, \widehat{g_c}(\omega)$$

wobei

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}, \qquad c = \frac{ab}{a-b}$$

Somit muss

$$f = \sqrt{\frac{ac}{b\pi}}\, g_c$$

werden.

b) Da g in $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ bandbegrenzt ist mit $\lambda_c = 1/\sqrt{2}$, kann man g aus den Werten $g(\frac{\pi n}{2})$ rekonstruieren, da $a := \frac{1}{4} < \frac{1}{2\lambda_c}$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Gegeben sei das folgende DGL-System:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - y_2 + 1 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 - 1 \end{aligned}$$

zu den Startbedingungen $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = -1$.

a) Bestimmen Sie dazu die Laplacetransformierten Y_1, Y_2 zu den Lösungen y_1, y_2.

Zur Orientierung: Es muss herauskommen:

$$Y_1(s) = \frac{2s}{s^2 - 5s + 6}, \qquad Y_2(s) = \frac{-s^2 + 7s + 6}{s(s^2 - 5s + 6)}.$$

b) Durch Rücktransformation berechnen Sie daraus y_1 und y_2.

Lösung. a) Durch Laplacetransformation gehen y_1 und y_2 in Funktionen Y_1, Y_2 über, welche das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} sY_1 - 2 &= 4Y_1 - Y_2 + \tfrac{1}{s} \\ sY_2 + 1 &= 2Y_1 + Y_2 - \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

erfüllen. Eine Umformung führt auf

$$\begin{aligned} (s-4)Y_1 + Y_2 &= 2 + \tfrac{1}{s} \\ -2Y_1 + (s-1)Y_2 &= -1 - \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

Die 1. Gleichung multiplizieren wir mit $s-1$. Von dem Resultat subtrahieren wir die 2. Gleichung. So entsteht

$$((s-1)(s-4)+2)Y_1(s) = (2+\frac{1}{s})(s-1) + 1 + \frac{1}{s} = 2s + 1 - 2 - \frac{1}{s} + 1 + \frac{1}{s} = 2s$$

also

$$Y_1(s) = \frac{2s}{s^2 - 5s + 6}$$

Weiter wird dann

$$\begin{aligned} Y_2(s) &= 2 + \frac{1}{s} - \frac{2s(s-4)}{s^2-5s+6} \\ &= \frac{(2s+1)(s^2-5s+6) - 2s^2(s-4)}{s(s^2-5s+6)} \\ &= \frac{2s^3 - 10s^2 + 12s + s^2 - 5s + 6 - 2s^3 + 8s^2}{s(s^2-5s+6)} \\ &= \frac{-s^2+7s+6}{s(s^2-5s+6)} \end{aligned}$$

gelöst.

b) Es gilt $s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$. Der Partialbruchansatz für Y_1 muss lauten

$$Y_1 = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

Es folgt $A = \lim_{s\to 2}(s-2)Y_1(s) = -4$ und $B = \lim_{s\to 3}(s-3)Y_1(s) = 6$, also ist

$$Y_1(s) = -\frac{4}{s-2} + \frac{6}{s-3}$$

und somit

$$y_1(t) = -4e^{2t} + 6e^{3t}$$

Entsprechend probieren wir

$$Y_2(s) = \frac{A'}{s} + \frac{B'}{s-2} + \frac{C'}{s-3}$$

und finden ebenso $A' = 1, B' = -8, C' = 6$, also

$$Y_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{8}{s-2} + \frac{6}{s-3}$$

was auf

$$y_2(t) = 1 - 8e^{2t} + 6e^{3t}$$

führt.