Prof. Dr. M. Heilmann, Apl. Prof. Dr. G. Herbort **30.8.2011**
Bergische Universität Wuppertal

Modul: Mathematik II, Masterstudiengang Sicherheitstechnik (MScF, MScQ,MScS)

Aufgabe 1 (20 Punkte)

a) Berechnen Sie die 3 dritten Wurzeln aus 1, die es in $\mathbb{C}$ gibt.

b) Berechnen Sie alle 3. Wurzeln aus $-2-2j$. Beachten Sie dabei, dass $1-j$ eine von ihnen ist. Berechnen Sie die beiden anderen 3. Wurzeln.

c) Die Schwingungen mit der Darstellung $f_1(t) = 4\sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$ und $f_2(t) = -2\cos(\omega t)$ werden überlagert. Sie ergeben dann die Schwingung mit der Darstellung $f(t) = A\sin(\omega t + \delta)$.

Berechnen Sie die Amplitude A und die Phase δ.

Lösung. a) Es gilt ja $1 = e^{2\pi j}$. Wählen wir also $\zeta = e^{2\pi j/3} = \cos(\frac{2\pi}{3}) + j\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}$, so finden wir mit $1, \zeta$ und $\zeta^2 = \frac{(-1+j\sqrt{3})^2}{4} = \frac{(-2-2j\sqrt{3})^2}{4} = \frac{-1-j\sqrt{3}}{2}$ alle 3. Wurzeln aus 1.

b) Die gesuchten 3. Wurzeln aus $-2-2j$ sind $1-j$, sowohl als auch

$$(1-j)\zeta = \frac{(1-j)(-1+j\sqrt{3})}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}+j(1+\sqrt{3})}{2}$$

und

$$(1-j)\zeta^2 = \frac{(1-j)(-1-j\sqrt{3})}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}+j(1-\sqrt{3})}{2}$$

c) Es gilt $f_1(t) = \operatorname{Im}(4e^{j\omega t+\pi j/6})$ und $f_2(t) = 2\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{Im}(2e^{j\omega t-\pi j/2})$. Es folgt dann

$$f_1(t) + f_2(t) = \operatorname{Im}\left(4e^{j\omega t+\pi j/6} + 2e^{j\omega t-\pi j/2}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{j\omega t}(4e^{\pi j/6} + 2e^{-\pi j/2})\right)$$

Wir berechnen $4e^{\pi j/6} + 2e^{-\pi j/2}$ und finden

$$4e^{\pi j/6} + 2e^{-\pi j/2} = 4\cos(\pi/6) = 2\sqrt{3}$$

So erhalten wir $A = 2\sqrt{3}$ und $\delta = 0$.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Es sei $x(t) = \frac{t^2}{\pi}$, wenn $t \in [0, \frac{\pi}{2})$ und $x(t) = 0$, wenn $t \in [\pi/2, \pi)$. Diese Funktion denken wir uns zu einer π-periodischen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

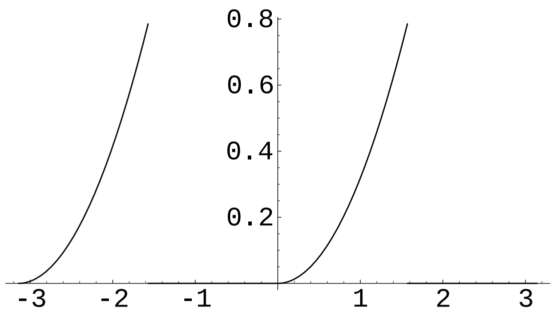
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $x(t)$ im Intervall $(-\pi, \pi)$.

b) Berechnen Sie die reelle Fourierreihe von x.

Hinweis: Die Funktion $x(t)e^{-2jkt}$ hat für $k \neq 0$ die Stammfunktion $X_k(t) = \frac{1}{\pi}e^{-2jkt}(-\frac{j}{4k^3} + \frac{t}{2k^2} + \frac{jt^2}{2k})$

c) Für jedes $t \in [0, \pi)$ berechnen Sie den Grenzwert der Fourierreihe von x.

Lösung. a) Der Graph verläuft so:



b) Wir berechnen die kompexen Fourierkoeffizienten c_k^*.

$$c_0^* = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi/2} t^2 dt = \frac{\pi}{24}$$

und für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k^* &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} t^2 e^{-2jkt} dt \\ &= \frac{1}{\pi}(\,X_k(\pi/2) - X_k(0)\,) \\ &= \frac{1}{\pi^2}(-1)^k\left(-\frac{j}{4k^3} + \frac{\pi}{4k^2} + \frac{j\pi^2}{8k}\right) + \frac{j}{4\pi^2 k^3} \\ &= (-1)^k\left(-\frac{j(1-(-1)^k)}{4\pi^2 k^3} + \frac{1}{4\pi k^2} + \frac{j}{8k}\right) \end{aligned}$$

Daraus resultiert die reelle Fourierreihe

$$x(t) \approx \frac{\pi}{24} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2\pi k^2}\cos(2kt) + \left(\frac{1-(-1)^k}{2\pi^2 k^3} - \frac{1}{4k}\right)\sin(2kt)\right)$$

c) Die Fourierkoeffizienten von x sind durch $|c_k^*| \leq 1/k$ nach oben abschätzbar. Daher konvergiert die Fourierreihe von x an allen Stellen t gegen $x(t)$, in denen x stetig ist, also auf $[0,\pi)\setminus\{\pi/2\}$.

Bei $t_0 = \pi/2$ untersuchen wir die Dini-Bedingung: Es gilt $x_*(t_0) = \frac{1}{2}(x(\pi/2+) + x(\pi/2-) = \frac{\pi}{8}$ und

$$\frac{x(t_0+s) + x(t_0-s) - 2x_*(t_0)}{s} = \frac{(t_0-s)^2/\pi - \pi/4}{s} = -1 + \frac{s}{\pi}$$

Diese Funktion ist nahe $s=0$ integrabel, so dass die Dini-Bedingung erfüllt ist. Es folgt, dass die Fourierreihe von x in $\pi/2$ gegen $x_*(\pi/2) = \frac{\pi}{8}$ konvergiert.

Aufgabe 3 (20 Punkte)

a) Es seien $t_0, t_1, t_2, A, B > 0$ und $f_1(t) := A$ für $|t| \leq t_1$ und $f_1(t) = 0$ sonst. Ebenso sei $f_2(t) = B$ für $|t| \leq t_2$ Berechnen Sie dann die Fouriertransformierte $\widehat{f_1}$ zu f_1 und $\widehat{f_2}$ zu f_2.

b) Für $t_1 < t_2$ sei g die Faltung $g = f_1 * f_2$. Was ist dann ihre Fouriertransformierte $\widehat{g}$?

c) Berechnen Sie damit das Integral

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega \, \sin(2\omega)}{\omega^2} e^{2j\omega} d\omega$$

Hinweis: Dazu denken Sie an den Faltungssatz und die Umkehrformel.

Lösung. a) Es gilt

$$\widehat{f_1}(\omega) = A \int_{-t_1}^{t_1} e^{-j\omega t} dt = 2A \frac{\sin(\omega t_1)}{\omega}$$

Entsprechend erhalten wir

$$\widehat{f_2}(\omega) = 2B \frac{\sin(\omega t_2)}{\omega}$$

b) Aus dem Faltungssatz erhalten wir

$$\widehat{g}(\omega) = \widehat{f_1}(\omega)\widehat{f_2}(\omega) = 4AB \frac{\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)}{\omega^2}$$

c) Wir beachten, dass mit $t_1 = 1, t_2 = 2$ und $A = B = 1$ gilt

$$4J = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_1}(\omega)\widehat{f_2}(\omega) e^{2j\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(\omega) e^{2j\omega} d\omega \,.$$

Nun ist aber für t nahe bei 2

$$g(t) = \int_{-1}^{1} f_2(t-s) ds = \int_{s:|s|\leq 1,\, -2\leq t-s\leq 2} ds = \int_{s\in[-1,1]\cap[t-2,t+2]} ds = \int_{[t-2,1]} ds = 3 - t$$

also g in $t = 2$ stetig.

Die Fourier-Umkehrformel ist anwendbar auf g und ergibt uns

$$4J = 2\pi g(2) = 2\pi$$

Damit wird $J = \pi/2$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)
Gegeben sei das folgende DGL-System:

$$\begin{aligned} y_1' &= -5y_1 - 6y_2 + 2 \\ y_2' &= 4y_1 + 5y_2 + 3 \end{aligned}$$

zu den Startbedingungen $y_1(0) = y_2(0) = -2$.

a) Bestimmen Sie dazu die Laplacetransformierten Y_1, Y_2 zu den Lösungen y_1, y_2.

Zur Orientierung: Es muss herauskommen:

$$Y_1(s) = \frac{-2s^2 + 24s - 28}{s(s^2 - 1)}, \qquad Y_2(s) = \frac{-2s^2 - 15s + 23}{s(s^2 - 1)} \,.$$

b) Durch Rücktransformation berechnen Sie daraus y_1 und y_2.

Lösung. Der Differenziationssatz ergibt dass y_1' die Laplacetransformierte sY_1+2 hat, entsprechend ist sY_2+2 die Laplacetransformierte zu y_2. Das ergibt

$$\begin{aligned} sY_1 + 2 &= -5Y_1 - 6Y_2 + \tfrac{2}{s} \\ sY_2 + 2 &= 4Y_1 + 5Y_2 + \tfrac{3}{s} \end{aligned}$$

Oder äquivalent:

$$\begin{aligned} (s+5)Y_1 + 6Y_2 &= -2 + \tfrac{2}{s} \\ -4Y_1 + (s-5)Y_2 &= -2 + \tfrac{3}{s} \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die 1. Gleichunmg mit $(s-5)$ und die 2. Gleichung mit 6. Dann subtrahieren wir beide Gleichungen und finden

$$(s^2-1)Y_1 = (s-5)(-2+\frac{2}{s}) - 6(-2+\frac{3}{s}) = -2s + 10 + 2 - \frac{10}{s} + 12 - \frac{18}{s} = -2s + 24 - \frac{28}{s}$$

also

$$Y_1(s) = \frac{-2s^2 + 24s - 28}{s(s^2-1)}$$

Wir nehmen die 1. Gleichung mal mit 4 und die 2. Gleichung mit $s+5$. Anschließende Addition beider Gleichungen ergibt

$$(s^2-1)Y_2(s) = 4(-2+\frac{2}{s}) + (s+5)(-2+\frac{3}{s}) = -8 + \frac{8}{s} - 2s - 10 + 3 + \frac{15}{s} = -2s - 15 + \frac{23}{s}$$

und damit

$$Y_2(s) = \frac{-2s^2 - 15s + 23}{s(s^2-1)}$$

b) Die Partialbruchzerlegung von Y_1 lautet

$$Y_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

mit

$$A = s \cdot Y_1(s)\Big|_{s=0} = 28, \qquad B = (s-1)\cdot Y_1(s)\Big|_{s=1} = -3, \qquad C = (s+1)\cdot Y_1(s)\Big|_{s=-1} = -27$$

Also ist

$$Y_1(s) = \frac{28}{s} - \frac{3}{s-1} - \frac{27}{s+1}$$

Die Partialbruchzerlegung von Y_2 lautet

$$Y_2(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

mit

$$A = s \cdot Y_2(s)\Big|_{s=0} = -23, \qquad B = (s-1)\cdot Y_2(s)\Big|_{s=1} = 3, \qquad C = (s+1)\cdot Y_2(s)\Big|_{s=-1} = 18$$

und damit

$$Y_2(s) = -\frac{23}{s} + \frac{3}{s-1} + \frac{18}{s+1}$$

Durch Rücktransformation folgt nun

$$y_1(t) = 28 - 3e^t - 27e^{-t}, \qquad y_2(t) = -23 + 3e^t + 18e^{-t}$$