Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 30.05.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei f eine im Punkt z_0 holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung n.

b) Die Taylor-Reihe von f im Punkt z_0 lautet:

$$f(z) = \sum_{j \geq n} a_j (z - z_0)^j.$$

c) Es gibt eine in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z).$$

Aufgabe 2. Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Potenzreihen um den Punkt z_0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius:

a)

$$\exp(z) \quad ; \quad z_0 = \pi i$$

b)

$$\frac{2z + 1}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} \quad ; \quad z_0 = 0$$

c)

$$\frac{1}{(z - i)^3} \quad ; \quad z_0 = -i$$

Hinweis: Verwenden Sie Partialbruchzerlegung für Teil b). Bedenken Sie im Allgemeinen: $\frac{d}{dz}(z+c)^{-k} = -k(z+c)^{-k-1}$ für $k > 0$, d.h. die Taylor-Reihe von $(z+c)^{-k-1}$ läßt sich aus der Taylor-Reihe von $(z + c)^{-k}$ durch Differentiation gewinnen.

Aufgabe 3. Es sei f eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die auf $\mathbb{R}$ reellwertig ist. Zeigen Sie: $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Nullstellenordnung von $\sin z$, $\tan z$, $\sin^2 z$ und $\sin(z^2)$ in den Nullstellen.

Aufgabe 5. Die Funktionen f und g seinen in einer Umgebung des Nullpunktes holomorph. Berechnen Sie $(fg)^{(n)}(0)$. Es seien $\sum_\nu a_\nu z^\nu$ und $\sum_\mu b_\mu z^\mu$ die Taylor-Reihen von f und g im Punkt 0. Zeigen Sie, dass

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu \right) \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu z^\mu \right) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\sum_{\nu+\mu=\kappa} a_\nu b_\mu \right) z^\kappa,$$

wobei die rechte Reihe in jedem Kreis um 0 konvergiert, in dem die beiden Reihen links konvergieren.

Abgabe: Do, 06.06.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).