

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1 + x^4)^2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{16 + x^2}.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin(t) - 2 \cos(t) + 3} \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} \frac{dt}{(a + b \cos(t))^2} \quad \text{für } a > b > 0.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Gebiet:

a) $z^7 - 5z^4 + iz^2 - 2$ in $\{|z| < 1\}$.

b) $2z^4 - 5z + 2$ in $\{|z| > 1\}$.

Aufgabe 4. Es sei

$$\text{Log} : \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

der Hauptzweig des Logarithmus. Entwickeln Sie $\text{Log}(z)$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.

Aufgabe 5. Es sei

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

der Hauptzweig der Quadratwurzel. Entwickeln Sie $\sqrt{\cdot}$ um einen beliebigen Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ in eine Potenzreihe und bestimmen Sie den Konvergenzradius. Was fällt auf, wenn Sie den Konvergenzkreis mit dem Definitionsgebiet von $\sqrt{\cdot}$ vergleichen?