Aufgabe 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z > 0} \mathrm{res}_z\, R(S)$$

WICHTIG: Voraussetzungen: keine Pole auf $\mathbb{R}$, deg Nenner $\geq$ deg Zähler + 2.

a) $\xi = e^{i\pi/4}$

$$R(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)} \cdot \frac{1}{(z-\xi)(z-\xi^3)(z-\xi^5)(z-\xi^7)}$$

Residuen: Pole in $\mathbb{H}$:

$z_1 = i$; $z_2 = \xi$; $z_3 = \xi^3$

nutze $i = \xi^2$, $-1 = \xi^4$

$$\mathrm{res}_{z_1} R(z) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\, R(z)$$

$$= \Big(2i \cdot \underbrace{\cancel{(\xi^2-\xi)(\xi^2-\xi^3)(\xi^2+\xi)(\xi^2+\xi^3)}}_{(z_1^4+1)}\Big)^{-1}$$

$$= \left(2i\,(i^4+1)\right)^{-1} = \frac{1}{4i} = -\frac{1}{4}\, i$$

$$\mathrm{res}_{z_2} R(z) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2)\, R(z)$$

$$= \left((z_2^2+1)(\xi-\xi^3)(\xi+\xi)(\xi+\xi^3)\right)^{-1}$$

$$= \left((i+1)\, 2\xi\, (\xi^2-\xi^6)\right)^{-1}$$

$$= \left((i+1)\, 2\xi\, 2\xi^2\right)^{-1} = \frac{1}{(i+1)\,4\,\xi^3}$$

$$\operatorname{res}_{z_3} R(z) = \lim_{z \to z_3} (z - z_3)\, R(z)$$

$$= \left((z_3^2 + 1)\,(\xi^3 - \xi)\,(\xi^3 + \xi)\,(\xi^3 + \xi^3) \right)^{-1}$$

$$= \left((1 - i)\; 2\xi^3\, (\xi^6 - \xi^2) \right)^{-1}$$

$$= \left((i - 1)\; 4\, \xi^5 \right)^{-1} = \frac{1}{(1-i)\, 4\, \xi}$$

<u>Summe der Residuen</u>

$$\frac{1}{(1+i)\, 4\, \xi^3} + \frac{1}{(1-i)\, 4\, \xi}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{(1+i)(1-i)}_{=2} \cdot 4\, \xi^3} \left(1 - i + (1+i)\, \overbrace{\xi^2}^{i} \right)$$

$$= \frac{\xi^5}{8} \left(1 - i + i - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4} i \right) = \frac{\pi}{2}$$

<u>einfacher Test</u>: ein reelles Integral muss reell-wertig sein.

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\,dx = \frac{2\pi i}{(1-e^{2\pi i\alpha})} \sum_{z\neq 0} \operatorname{res}_z(\zeta^\alpha R(\zeta))$.

Voraussetzungen! · keine Pole auf $(0,+\infty)$

- $0 < \alpha < 1$
- höchstens Pol 1. Ordnung in 0
- deg Nenner $\geq$ deg Zähler + 1

ζ^α ist der Zweig $|\zeta|^\alpha \cdot e^{i\alpha \arg\zeta}$

$0 < \arg\zeta < 2\pi$

NICHT DER HAUPTZWEIG!

$$R(z) = z^{1/2} \frac{1}{16+z^2} = z^{1/2} \frac{1}{(z+4i)(z-4i)}$$

$z_1 = 4i$; $z_2 = -4i$; $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$

$\arg(z_2) = \frac{3}{2}\pi$

$\sqrt{4i} = 2\cdot\xi$, $\sqrt{-4i} = 2\cdot\xi^3$

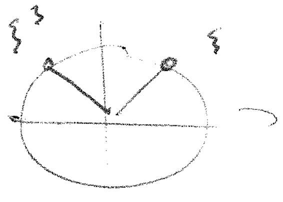
$$\operatorname{res}_{z_1} R(z) = \lim_{z_1\to z} (z-z_1)R(z)$$
$$= 2\xi\,(4i+4i)^{-1} = \frac{1}{4}\frac{\xi}{i} = \cancel{\frac{1}{4}\frac{\xi^3}{i}} \quad \frac{\xi}{4i}$$

$$\operatorname{res}_{z_2} R(z) = \lim_{z_2\to z} (z-z_2)R(z)$$
$$= 2\xi^3(-4i-4i)^{-1} = \cancel{\frac{1}{4}\frac{\xi^3}{i}} \quad - \frac{\xi^3}{4i}$$

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha R(x)\,dx = \frac{2\pi i}{(1-e^{\pi i})} \sum$$

$$= \pi i \left(\cancel{-\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{1}{4}\xi^3 i}\right)\left(\frac{\xi}{4i} - \frac{\xi^3}{4i}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\pi\,(\xi - \xi^3)$$



$$= \frac{1}{4}\pi \; 2/\sqrt{2} \qquad \xi = 1/\sqrt{2} + i\,1/\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{4}\pi \cdot \sqrt{2} \qquad \xi^3 = -1/\sqrt{2} + i\,1/\sqrt{2}$$

Aufgabe 2

a) Substitution $\quad z = e^{it}, \quad dt = \frac{dz}{iz}$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

folgt:
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin(t) - 2\cos(t) + 3}$$

erweitere mit $2i$

$$= \frac{2i}{i}\int_{\partial D_1(0)} \frac{1}{z - \frac{1}{z} + iz + \frac{i}{z} + 6i} \cdot \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{2i}{i}\int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{(1+i)z^2 + 6iz + (i-1)} = \ldots$$

6

$$\ldots = 4\pi i \sum_{|z|<1} \operatorname{res}_z R(S)$$

$$\text{mit} \quad R(S) = \frac{1}{(1+i)z^2 + 6iz + (i-1)}$$

<u>RECHENTIPP</u>: $\quad \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z \cdot \bar z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(i+1)} = \frac{1-i}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 6i/_{i+1} = 6i \cdot \tfrac{1}{2}(1-i) = 3 + 3i \quad ;$$

$$(i-1)/_{i+1} = \tfrac{1}{2}(-1)(1-i)^2 = -\tfrac{1}{2}(1-2i-1) = i$$

<u>also</u>: $\quad R(z) = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{1}{z^2 + (3+3i)z + i} \quad | \ldots$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{(a+b\cos(t))^2}$ für <u>$a > b > 0$</u>

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(a+b\cos(t))^2} = \frac{1}{2i}\int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{z \cdot (a + \frac{b}{2}z + \frac{b}{2}z^{-1})^2}$$

<u>erweitere</u> <u>mit</u> <u>$2z$</u> ↓

$$= \frac{1}{i}\int_{\partial D_1(0)} \frac{2z\,dz}{(2az + bz^2 + b)^2} = \frac{2}{ib}\int_{\partial D_1(0)} \frac{z\,dz}{z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{4\pi}{b} \sum_{|z|<1} \operatorname{res}_z R(s)$$

mit $R(s) = \dfrac{s}{s^2 + 2\frac{a}{b}s + 1}$ $\qquad \boxed{a/b > 1}$

<u>Nullstellen</u> von $\underline{z^2 + 2\frac{a}{b}z + 1}$

$$z_{1,2} = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}_{>0}}$$

<u>betrachte</u> $-x \pm \sqrt{x^2-1}$ für $x > 1$

① $-x - \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{>0} < -1$

liegt nicht in $D_1(0)$.

② $-x + \sqrt{x^2-1} < -x + \sqrt{x^2} < 0$

& $-x + \sqrt{x^2-1} > -1$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-1} > x - 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 1 > x^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow \quad 2x > 2$

...

18.07.2013

Übungsblatt 13

Aufgabe 3

a) $g(z) = z^7 - 5z^4 + i z^2 - 2$ dominanter Term

$f(z) = -5z^4$

für $z \in \partial D_1(0)$: $|g-f| \leq |z|^7 + |z|^2 + 2 = 4$

$|f| = 5$

$\Rightarrow$ f und g haben 4 NS in $D_1(0)$.

b) $g(z) = 2z^4 - 5z + 2$

dominanter Term

$f(z) = -5z$

für $z \in \partial D_1(0)$: $\left.\begin{array}{l}|g-f| \leq 2|z|^4 + 2 = 4 \\ |f| = 5\end{array}\right\} (*)$

Stetigkeit

$\Rightarrow$ Die Relation $|g-f| < |f|$ stimmt auf $\partial D_r(0)$ für $r \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

$\Rightarrow$ f und g haben 1 NS in $D_r(0)$ $\forall r \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

NICHT NÖTIG

$(*) \Rightarrow$ f und g haben 1 NS in $D_1(0)$ & keine auf dem Rand.

FUNDAMENTALSATZ g hat in $\mathbb{C}$ 4 NS

$\Rightarrow$ g hat 3 NS in $\mathbb{C} - \overline{D_1(0)}$. $\square$

Aufgabe 4

$\log 1 + i \arg z, \quad -\pi < \arg < \pi$

Ableitungen: $f(z) = \operatorname{Log}(z)$; $\operatorname{Log}(1) = 0$

$f'(z) = \frac{1}{z}$, $f''(z) = -\frac{1}{z^2}$, $f'''(z) = 2\frac{1}{z^3}$

$\Rightarrow \quad f^{(k)}(z) = (-1)^{k+1}(k-1)!\, z^{-k}$

$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!$

$\frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(z) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \cancel{\frac{(k-1)!}{k!}} \frac{(z-z_0)^k}{k}}$$

Konvergenzradius

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

Aufgabe 5

Ableitungen: $f(z) = z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$

$\Rightarrow f'(z) = \exp(\alpha \operatorname{Log} z) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{z} = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$

$\Rightarrow f^{(k)}(z) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\, z^{\alpha-k}$

$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(z) = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} z_0^{\alpha-k} (z-z_0)^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{(k+1)!}{(k)!} \frac{1}{\alpha-k}}_{\to 1} \cdot |z_0| = |z_0| .$$

(2)