

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die Art der Singularität im Punkt z_0 . Berechnen Sie für hebbare Singularitäten den Grenzwert von f in z_0 , geben Sie für nicht-hebbare Singularitäten den Hauptteil an.

a)

$$f_1(z) = \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1} \quad \text{in } z_0 = -i$$

b)

$$f_2(z) = \frac{1}{1 - e^z} \quad \text{in } z_0 = 0$$

c)

$$f_3(z) = \frac{\cos z - 1}{z^4} \quad \text{in } z_0 = 0$$

d)

$$f_4(z) = \cos(1/z) \quad \text{in } z_0 = 0$$

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\partial D_1(-i)} f_1(z) dz, \quad \int_{\partial D_1(0)} f_2(z) dz, \quad \int_{\partial D_2(0)} f_3(z) dz, \quad \int_{\partial D_3(0)} f_4(z) dz.$$

Aufgabe 2. Es sei $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $e^{1/z}$ in $D_\epsilon(0) - \{0\}$ jeden von Null verschiedenen Wert unendlich oft annimmt.

Aufgabe 3. Seien f und g zwei holomorphe Funktionen, die in einem Punkt z_0 beide eine Nullstelle n -ter Ordnung haben. Zeigen Sie, dass z_0 eine hebbare Singularität von f/g ist, und dass gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)}.$$

Aufgabe 4. Es sei z_0 isolierte Singularität einer holomorphen Funktion f . Zeigen Sie, dass z_0 kein Pol von e^f ist.

Hinweis: Vergleichen Sie die Laurent-Reihen von e^f und $(e^f)' = f'e^f$.

Abgabe: Do, 04.07.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).