Prof. Dr. J. Ruppenthal
Dr. T. Harz

Wuppertal, 20.06.2019

Einführung in die Funktionentheorie (SS 2019)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Bestimmen Sie das Konvergenzgebiet der folgenden Laurent-Reihen:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} 2^{-|\nu|} z^{\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{\nu^2+2} \quad , \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} 2^{\nu}(z+2)^{\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{e^{\alpha\nu}+e^{-\alpha\nu}} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2. Seien $L_1(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu (z-a)^\nu$ und $L_2(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_\nu (z-a)^\nu$ zwei Laurent-Reihen, die auf einem nicht-leeren Kreisring die gleiche Funktion f darstellen. Zeigen Sie: $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass eine Laurent-Reihe in ihrem Konvergenzgebiet gliedweise differenziert werden darf.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Laurent-Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

a)
$$\frac{1}{z(z-3)^2} \text{ für } 1 < |z-1| < 2$$

b)
$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^k \text{ mit } k \in \mathbb{N} \text{ für } |z| > 1$$

c)
$$\frac{z^2-1}{z^2+1} \text{ für } |z-1| > 2$$

d)
$$\frac{e^z}{z(z-1)} \text{ für } |z| > 1$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

a)
$$\frac{z-1}{\sin^2 z} \text{ für } 0 < |z| < \pi$$

b)
$$\frac{e^{iz}}{z^2+b^2} \text{ für } 0 < |z-ib| < 2b\,, \text{ wobei } b > 0$$

Abgabe: Do, 27.06.19 in der Übung oder bis 10 Uhr in Postfach 33 (Ebene D.13).