Lineare Algebra II (WS 2017)
Bonus-Test II, Gruppe B

PD Dr. Jürgen Müller, M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie hier Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** ein:

Aufgabe 1: Eigenwerte. (1 Punkt)
Es sei v Eigenvektor einer reellen Matrix A zum Eigenwert 2. Man entscheide, ob v auch Eigenvektor der Matrix $A^2 + 3A$ ist, und gebe gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert an. ('nein' oder Eigenwert)

$\boxed{10}$

Aufgabe 2: Diagonalisierbarkeit. (3 Punkte)
Man untersuche die folgenden reellen Matrizen auf Diagonalisierbarkeit:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C := \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Diagonalisierbar über $\mathbb{R}$: $\boxed{A}$

Diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$: $\boxed{C}$

Nicht diagonalisierbar: $\boxed{B}$

Aufgabe 3: Jordan-Normalform I. (3 Punkte)
Man betrachte die reelle Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Man bestimme die Eigenwerte von A. $\boxed{-1}$

b) Man gebe die Jordan-Normalform von A an. $\boxed{J_2(-1)}$

c) Man gebe eine zugehörige Jordan-Basis an. $\boxed{[[1,0]^{\mathrm{tr}}, [2,4]^{\mathrm{tr}}]}$

Aufgabe 4: Minimalpolynom. (1 Punkt)
Eine reelle Matrix A habe das Minimalpolynom $X^2 - 3X - 40$. Man entscheide, ob A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und gebe gegebenenfalls die Menge der Diagonaleinträge von D an. ('nein' oder Einträge)

$\boxed{\{-5, 8\}}$

Aufgabe 5: Jordan-Normalform II. (4 Punkte)
Eine komplexe Matrix A sei ähnlich zur Blockdiagonalmatrix

$$J_5(1) \oplus J_4(-i) \oplus J_4(1) \oplus J_3(\sqrt{2}) \oplus J_2(1) \oplus J_1(-i).$$

Man gebe das charakteristische Polynom χ_A, das Minimalpolynom μ_A, sowie die algebraische Vielfachheit $\nu_1(A)$ und die geometrische Vielfachheit $\gamma_1(A)$ des Eigenwertes 1 von A an.

$\boxed{\chi_A = (X-1)^{11}(X-\sqrt{2})^3(X+i)^5}$

$\boxed{\mu_A = (X-1)^5(X-\sqrt{2})^3(X+i)^4}$

$\boxed{\nu_1(A) = 11}$ $\boxed{\gamma_1(A) = 3}$

Aufgabe 6: Jordan-Normalform III. (2 Punkte)
Eine komplexe Matrix A habe das charakteristische Polynom $\chi_A = (X-a)^{10}$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (X-a)^3$, wobei der Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_a(A) = 4$ habe.

a) Man gebe eine mögliche Jordan-Normalform von A an.

$\boxed{J_3(a) \oplus J_3(a) \oplus J_3(a) \oplus J_1(a),\ J_3(a) \oplus J_3(a) \oplus J_2(a) \oplus J_2(a)}$

b) Wieviele mögliche Jordan-Normalformen von A gibt es, bis auf Reihenfolge der Jordan-Blöcke?

$\boxed{2}$

Aufgabe 7: Jordan-Normalform IV. (2 Punkte)
Eine komplexe Matrix A habe den einzigen Eigenwert 0, und die Potenzen von A sollen die folgenden Ränge $\mathrm{rk}(A^i)$, für $i \geq 0$, haben:

$$[15, 9, 5, 2, 1, 0, 0, \ldots]$$

a) Man gebe die Folge der Dimensionen $\dim_{\mathbb{C}}(T_{X^i}(A))$, für $i \geq 0$, an.

$\boxed{[0, 6, 10, 13, 14, 15, 15, \ldots]}$

b) Man gebe die Jordan-Normalform von A an.

$\boxed{J_5(0) \oplus J_3(0) \oplus J_3(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)}$