

Lineare Algebra II (WS 2017)
Bonus-Test II, Gruppe A

PD Dr. Jürgen Müller, M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie hier Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** ein:

Aufgabe 1: Eigenwerte.

(1 Punkt)

Es sei v Eigenvektor einer reellen Matrix A zum Eigenwert 3. Man entscheide, ob v auch Eigenvektor der Matrix $A^2 - 3A$ ist, und gebe gegebenenfalls den zugehörigen Eigenwert an. ('nein' oder Eigenwert)

Aufgabe 2: Diagonalisierbarkeit.

(3 Punkte)

Man untersuche die folgenden reellen Matrizen auf Diagonalisierbarkeit:

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad C := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonalisierbar über \mathbb{R} :

Diagonalisierbar über \mathbb{C} , aber nicht über \mathbb{R} :

Nicht diagonalisierbar:

Aufgabe 3: Jordan-Normalform I.

(3 Punkte)

Man betrachte die reelle Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Man bestimme die Eigenwerte von A .

b) Man gebe die Jordan-Normalform von A an.

c) Man gebe eine zugehörige Jordan-Basis an.

Aufgabe 4: Minimalpolynom.

(1 Punkt)

Eine reelle Matrix A habe das Minimalpolynom $X^2 + 3X - 40$. Man entscheide, ob A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und gebe gegebenenfalls die Menge

der Diagonaleinträge von D an. ('nein' oder Einträge)

$\{5, -8\}$

Aufgabe 5: Jordan-Normalform II.

(4 Punkte)

Eine komplexe Matrix A sei ähnlich zur Blockdiagonalmatrix

$$J_5(2) \oplus J_4(i) \oplus J_3(2) \oplus J_3(\sqrt{2}) \oplus J_2(2) \oplus J_1(i).$$

Man gebe das charakteristische Polynom χ_A , das Minimalpolynom μ_A , sowie die algebraische Vielfachheit $\nu_2(A)$ und die geometrische Vielfachheit $\gamma_2(A)$ des Eigenwertes 2 von A an.

$\chi_A = (X - 2)^{10}(X - \sqrt{2})^3(X - i)^5$

$\mu_A = (X - 2)^5(X - \sqrt{2})^3(X - i)^4$

$\nu_2(A) = 10$

$\gamma_2(A) = 3$

Aufgabe 6: Jordan-Normalform III.

(2 Punkte)

Eine komplexe Matrix A habe das charakteristische Polynom $\chi_A = (X - a)^{10}$ und das Minimalpolynom $\mu_A = (X - a)^4$, wobei der Eigenwert $a \in \mathbb{C}$ die geometrische Vielfachheit $\gamma_a(A) = 3$ habe.

a) Man gebe eine mögliche Jordan-Normalform von A an.

$J_4(a) \oplus J_4(a) \oplus J_2(a), J_4(a) \oplus J_3(a) \oplus J_3(a)$

b) Wieviele mögliche Jordan-Normalformen von A gibt es, bis auf Reihenfolge der Jordan-Blöcke?

2

Aufgabe 7: Jordan-Normalform IV.

(2 Punkte)

Eine komplexe Matrix A habe den einzigen Eigenwert 0, und die Potenzen von A sollen die folgenden Ränge $\text{rk}(A^i)$, für $i \geq 0$, haben:

$$[15, 10, 7, 4, 2, 1, 0, 0, \dots]$$

a) Man gebe die Folge der Dimensionen $\dim_{\mathbb{C}}(T_{X^i}(A))$, für $i \geq 0$, an.

$[0, 5, 8, 11, 13, 14, 15, 15, \dots]$

b) Man gebe die Jordan-Normalform von A an.

$J_6(0) \oplus J_4(0) \oplus J_3(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$