Lineare Algebra II (WS 2017)
Bonus-Test I, Gruppe B

PD Dr. Jürgen Müller, M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie hier Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** ein:

	Lösungen

Aufgabe 1: Polynomdivision. (2 Punkte)
Es seien $f := X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $g := X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Quotient $q \in \mathbb{Q}[X]$ und Rest $r \in \mathbb{Q}[X]$ der Divison von f durch g sind:

$q = X$

$r = X + 1$

b) Ein größter gemeinsamer Teiler von f und g ist: $X + 1$

Aufgabe 2: Gaußsche Zahlen. (2 Punkte)
Man entscheide jeweils, welche der folgenden Elemente z im Ring der Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ irreduzibel sind ('irr'), und gebe andernfalls eine Faktorisierung an:

a) $z = 3$: irreduzibel

b) $z = 5$: $(2 + i)(2 - i)$

Aufgabe 3: Eigenvektoren. (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M_n(K)$. Außerdem seien $v, w \in K^n$ Eigenvektoren für A zu den Eigenwerten $a \in K$ bzw. $b \in K$. Man entscheide jeweils, welche der folgenden Aussagen richtig ('ja') oder falsch ('nein') sind:

a) Ist $a \neq b$, so ist $v - w$ **kein** Eigenvektor für A. ja

b) Ist $a \neq b$, so ist $v - w$ ein Eigenvektor für A. nein

c) Ist $a = b$, so ist $v - w$ **kein** Eigenvektor für A. nein

d) Ist $a = b$, so ist $v - w$ ein Eigenvektor für A. nein

Aufgabe 4: Diagonalisierbarkeit. (6 Punkte)

Es sei $A := \begin{bmatrix} . & 1 \\ -1 & . \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \subseteq M_2(\mathbb{C})$.

a) Das charakteristische Polynom χ_A von A lautet: $\boxed{X^2 + 1}$

b) Die Menge der Eigenwerte von A über $\mathbb{C}$ ist: $\boxed{\{i, -i\}}$

c) Man entscheide, ob A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenenfalls eine Basis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren für A. (Antwort: 'nein' oder Basis)

$\boxed{\{[1, i]^{\mathrm{tr}}, [i, 1]^{\mathrm{tr}}\}}$

d) Die Menge der Eigenwerte von A über $\mathbb{R}$ ist: $\boxed{\emptyset}$

e) Man entscheide, ob A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren für A. (Antwort: 'nein' oder Basis)

$\boxed{\text{nein}}$

f) Man gebe eine geometrische Beschreibung des von A bewirkten Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$ an: $\boxed{\text{Drehung um } 90^\circ \text{ nach rechts}}$

Aufgabe 5: Charakteristisches Polynom. (3 Punkte)

Man betrachte die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\kappa\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})\colon M \mapsto AM - MA$, wobei

$$A := \begin{bmatrix} . & -1 \\ -1 & . \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

a) Das charakteristische Polynom χ_κ von κ lautet:

$\boxed{X^4 - 4X^3 = X^2(X-2)(X+2)}$

b) Die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von κ sind: (Man gebe jeden Eigenwert sooft an, wie seine algebraische Vielfachheit besagt.)

$\boxed{[0, 0, 2, -2]}$

c) Die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von κ sind: (Man gebe jeden Eigenwert sooft an, wie seine geometrische Vielfachheit besagt.)

$\boxed{[0, 0, 2, -2]}$