Klausur zur Linearen Algebra II (WS 2017/18)

PD Dr. Jürgen Müller, M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1: Größter gemeinsamer Teiler. (4+2 Punkte)
Es seien

$$f := X^5 - 1 \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{und} \quad g := X^3 - 1 \in \mathbb{Q}[X].$$

a) Man bestimme das normierte Polynom $d \in \mathrm{ggT}(f, g) \subseteq \mathbb{Q}[X]$, und gebe Bézout-Koeffizienten $a, b \in \mathbb{Q}[X]$ mit $af + bg = d$ an.

b) Man schreibe g als Produkt irreduzibler Polynome über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2: Diagonalisierbarkeit. (4+2 Punkte)
Man betrachte die folgenden reellen Matrizen

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Man entscheide jeweils, ob diese Matrizen **i)** diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, **ii)** diagonalisierbar über $\mathbb{C}$, aber nicht über $\mathbb{R}$, oder **iii)** nicht diagonalisierbar sind.

b) Man bestimme jeweils eine Jordan-Normalform dieser Matrizen über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3: Matrixpotenzen. (4 Punkte)
Es sei $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Man berechne A^{2018}.

Aufgabe 4: Satz von Cayley-Hamilton. (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, und $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Es gibt ein Polynom $f \in K[X]$ mit $A^{-1} = f(A) \in K^{n\times n}$.

Aufgabe 5: Eigenwerte. (4+2 Punkte)
Man betrachte die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}\colon A \mapsto CA - AC$, wobei

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Man bestimme die Eigenwerte von φ, und Basen für die Eigenräume von φ.

b) Man bestimme das Minimalpolynom φ.

Aufgabe 6: Matrixgleichungen. (4 Punkte)
Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^2 = E_n$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$? In diesem Fall bestimme man, welche Jordan-Normalformen A haben kann.

Aufgabe 7: Kombinatorik von Jordan-Normalformen. (2+4 Punkte)
Eine komplexe Matrix A habe für ein $a \in \mathbb{C}$ die Jordan-Normalform

$$J_4(a) \oplus J_4(a) \oplus J_1(a) \oplus J_1(a).$$

a) Man gebe das charakteristische Polynom χ_A, das Minimalpolynom μ_A, sowie die geometrische Vielfachheit $\gamma_a(A)$ des Eigenwerts a von A an.

b) Man gebe alle Jordan-Normalformen (bis auf Reihenfolge der Blöcke) von Matrizen B an, für die $\chi_B = \chi_A$ und $\mu_B = \mu_A$ und $\gamma_a(B) = \gamma_a(A)$ gilt, die aber nicht ähnlich zu A sind. Für diese gebe man jeweils die Folge der Dimensionen $\dim_{\mathbb{C}}(T_{(X-a)^i}(B))$, für $i \geq 0$, an.

Aufgabe 8: Jordan-Normalform. (2+4+4 Punkte)
Man betrachte die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

a) Man bestimme das charakteristische Polynom von A, sowie die Eigenwerte von A zusammen mit ihren algebraischen Vielfachheiten.

b) Man gebe $\mathbb{C}$-Basen der Eigenräume und Haupträume von A an, und bestimme das Minimalpolynom von A. Ist A diagonalisierbar?

c) Man bestimme eine Jordan-Normalform J von A, und gebe eine geeignete Transformationsmatrix P mit $P^{-1}AP = J$ an.

Aufgabe 9: Orthogonalbasen. (4+2 Punkte)
Es sei Φ die durch die Gram-Matrix

$$G_B^B(\Phi) := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

bezüglich der Standardbasis $B \subseteq V := \mathbb{R}^{3\times 1}$ gegebene Bilinearform auf V.

a) Man bestimme eine Φ-Orthogonalbasis $C \subseteq V$, und gebe die zugehörige Gram-Matrix $G_C^C(\Phi)$ an.

b) Man gebe die Signatur von Φ an. Gibt es Φ-isotrope Vektoren?

Aufgabe 10: Orthonormalbasen. (4+2+2 Punkte)
Es seien $V := \mathbb{R}^{4\times 1}$ versehen mit dem Standardskalarprodukt, sowie $U := \langle v_1, v_2, v_3\rangle_{\mathbb{R}} \leq V$, wobei

$$v_1 := [1,1,0,0]^{\mathrm{tr}} \quad \text{und} \quad v_2 := [0,1,1,0]^{\mathrm{tr}} \quad \text{und} \quad v_3 := [0,0,1,1]^{\mathrm{tr}}.$$

a) Man bestimme die zu $[v_1, v_2, v_3]$ gehörende Gram-Schmidt-Basis für U.

b) Man gebe eine Orthonormalbasis für $U^\perp \leq V$ an.

c) Jeder Vektor $v \in V$ kann eindeutig in der Form $v = v' + v''$ mit $v' \in U$ und $v'' \in U^\perp$ geschrieben werden. Man bestimme v' und v'' für $v := [1,2,3,4]^{\mathrm{tr}}$.

Hinweis zu b) und c). Dies ist auch ohne Lösung zu a) machbar.

Aufgabe 11: Adjungierte Abbildungen. (4 Punkte)
Es seien V ein unitärer Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ normal mit Eigenvektoren $v, w \in V$ zu verschiedenen Eigenwerten. Man zeige: Es ist v orthogonal zu w.

Aufgabe 12: Hauptachsentransformation. (4+2+2 Punkte)
Es seien $V := \mathbb{R}^{2\times 1}$ versehen mit dem Standardskalarprodukt, und Φ die Bilinearform auf V, die durch die folgende Gram-Matrix bezüglich der Standardbasis $B \subseteq V$ gegeben ist:

$$G = G_B^B(\Phi) := \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

a) Man bestimme die Hauptachsen von Φ, und gebe eine Diagonalmatrix D und eine orthogonale Matrix P an, so daß $P^* G P = D$ gilt.

b) Man bestimme die Signatur von Φ. Ist Φ ein Skalarprodukt?

c) Man zeichne die Hauptachsen von Φ und die Menge $\mathcal{E} := \{v \in V; \Phi(v,v) = 9\}$ in der Euklidischen Ebene. Welche geometrische Beschreibung hat $\mathcal{E}$?