| | |
|---|---|
| **Übungen zur Linearen Algebra II** | Bergische Universität Wuppertal |
| Wiederholungsblatt | Dr. Thorsten Weist |
| keine Abgabe | M.Sc. Lucas Ruhstorfer |

**Aufgabe 1**

Berechnen Sie die Hauptraumzerlegung der folgenden reellwertigen Matrizen und bestimmen Sie die dazugehörige Jordan Normalform sowie die entsprechenden Basiswechselmatrizen:

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 25 & 34 & 18 \\ -14 & -19 & -10 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 2**

Betrachten Sie die reellen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \text{ und } A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Bestimmen Sie orthogonale Matrizen $T_i \in \mathcal{O}(4)$, $i = 1, 2$, so dass $T_i^{-1} A_i T_i$ eine Diagonalmatrix ist

b) Bestimmen Sie Matrizen $S_i$, $i = 1, 2$, so dass $S_i^t A_i S_i$ Diagonalgestalt mit Diagonaleinträgen aus $\{0, 1, -1\}$ hat.

c) Untersuchen Sie die durch die Matrizen beschriebenen Bilinearformen auf Definitheit.

**Aufgabe 3**

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B} = ((1,2,0),(0,2,1),(2,0,-1))$ des $\mathbb{R}^3$ an.

b) Betrachten Sie den Untervektorraum $U = \langle (3,0,4,1,0),(7,0,1,0,1),(10,4,5,0,0) \rangle$ des $\mathbb{R}^5$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U$ und $U^\perp$.

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom des Endomorphism $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2n})$ mit

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{falls } 2 \nmid i \\ e_{i-1} & \text{falls } 2 \mid i \end{cases} .$$

## Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Zwei komplexe $3 \times 3$-Matrizen sind genau dann zueinander ähnlich, wenn sie das gleiche Minimalpolynom und das gleiche charakteristische Polynom haben.

b) Seien $\langle , \rangle$ und $( , )$ zwei Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es einen Isomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass $\langle x, y \rangle = (f(x), f(y))$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

c) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Sind $f, g \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbar, so ist auch $f + g$ diagonalisierbar.

d) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

e) Alle reellen, orthogonalen $2 \times 2$-Matrizen sind diagonalisierbar.

f) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $U, W$ zwei Untervektorräume von $V$, so dass $V = U \oplus W$. Dann ist $W$ isomorph zu $V/U$.

g) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $U$ ein Untervektorraum von $V$. Dann ist die natürliche Abbildung $U^0 \to (V/U)^*$, $f \mapsto (x + U \mapsto f(x))$ wohldefiniert und induziert einen Isomorphismus $U^0 \cong (V/U)^*$.

## Aufgabe 6

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt eine Zerlegung $f = \mathrm{id}_V + s$, so dass $s \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent ist.

(ii) Es gilt $\chi_f = (X - 1)^{\dim V}$.

(iii) Es gilt $\mu_f = (X - 1)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

## Aufgabe 7

Sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ die Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt $s$ auf $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\mathcal{B}$ eine Orhonormalbasis bezüglich dieses Skalarprodukts ist.

b) Geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{E}}(s)$ dieses Skalarprodukts bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ des $\mathbb{R}^3$ an.

## Aufgabe 8

a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit $\chi_A = (X - 2)^3 (X - 1)$ und $\mu_A = (X - 2)^2 (X - 1)$ an.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $\chi_A = X(X-1)^4$, $\mu_A = X(X-1)^2$ und $\operatorname{rang}(A - E_5) = 2$. Bestimmen Sie die Jordan Normalform von $A$.

**Aufgabe 9**

Überprüfen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

diagonalisierbar ist und bestimmen Sie in diesen Fällen eine invertierbare Matrix $S_t \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $S_t^{-1} A S_t$ eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 10**

Zeigen Sie, dass durch die Abbildung

$$s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

**Aufgabe 11**

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $f : V \to V$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für $x, y \in V$ mit $x \perp y$ gilt $f(x) \perp f(y)$.

(ii) Für $x, y \in V$ mit $||x|| = ||y||$ gilt $||f(x)|| = ||f(y)||$.

(iii) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und eine orthogonale bzw. unitäre Abbildung $g \in \operatorname{End}(V)$ mit $f = \lambda \cdot g$.

**Aufgabe 12**

Zeigen Sie, dass für ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(i) Je zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\mu_A = \mu_B = p$ sind ähnlich.

(ii) Es ist $\deg(p) = 1$, $\deg(p) = n$ oder es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $p = (X - \lambda)^{n-1}$.