Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Seien $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ die kanonischen Basen von $\mathbb{Q}^3$ bzw. $\mathbb{Q}^4$ und

$$\mathcal{B} = ((1,1,0),(1,0,1)(0,1,1)) \text{ bzw. } \mathcal{B}' = (1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0),(0,0,0,1))$$

zwei weitere Basen. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^4,\ (x,y,z) \mapsto (x-y+z, x+y+z, x+2y+3z, x-2y+3z).$$

Bestimmen Sie $M_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}(f)$, $M_{\mathcal{A},\mathcal{B}'}(f)$, $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ und $M_{\mathcal{B},\mathcal{A}'}(f)$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 = x_3 - x_4,\ x_1 - x_2 = x_3 + x_4\}$$

von $\mathbb{R}^4$.

b) Seien die Unterräume U bzw. V von $\mathbb{R}^5$ definiert durch

$$U = \langle (1,1,1,0,1),(2,1,0,0,1),(0,0,1,0,0)\rangle,$$

$$V = \langle (1,1,0,0,1),(3,2,0,0,2),(0,1,1,1,1)\rangle.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U+V$ bzw. $U \cap V$.

Aufgabe 3

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ bzw. $A \cdot x = b$ für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

b) Seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $a_1, \ldots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Determinante $\det(A) = \prod_{i,j\in\{1,\ldots,n\}:\, i<j}(a_j - a_i)$. hat.

Aufgabe 5

a) Seien T, U_1 und U_2 Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeige, dass $(T \cap U_1) + (T \cap U_2) \subseteq T \cap (U_1 + U_2)$ und konstruiere ein Beispiel, in dem $(T \cap U_1) + (T \cap U_2) \neq T \cap (U_1 + U_2)$.

b) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen zwischen Mengen. Zeigen Sie, dass wenn $g \circ f$ bijektiv ist, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$B_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist B_λ invertierbar? Bestimmen Sie in diesem Fall die inverse Matrix B_λ^{-1}.

Aufgabe 7

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Sei n ungerade und $A^t = -A$. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$ ist.

b) Sei $A^t A = E_n$. Zeigen Sie, dass $\det A \in \{1, -1\}$ ist.

Aufgabe 8

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Ist $X = Y$ und f injektiv, dann ist f bijektiv.

b) $x_1 \sim x_2$ genau dann, wenn x_1 und x_2 in der selben Faser von f liegen, definiert eine Äquivalenzrelation auf X.

c) Die Abbildung f ist genau dann bijektiv, wenn $|f^{-1}(y)| = 1$ für alle $y \in Y$.

d) Es gibt eine Menge Z, eine surjektive Abbildung $g : X \to Z$ und eine injektive Abbildung $h : Z \to Y$, sodass $f = h \circ g$.

Aufgabe 9

Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Ist U ein Untervektorraum von V mit $\dim U = k$, so gibt es eine Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, so dass $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_k})$ eine Basis von U ist.

b) Falls $n \leq m$, so gibt es eine injektive lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(b_i) = c_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

c) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig, so lässt sich jedes v_i als Linearkombination der Vektoren v_j mit $j \neq i$ schreiben.

d) Alle linear unabhängigen Familien der gleichen Länge erzeugen den gleichen Unterraum.

e) Für $r \geq 0$ bildet die Menge der Matrizen mit Rang kleiner gleich r einen Untervektorraum von $K^{n \times n}$.

Aufgabe 10

Sei U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$, sodass jede Matrix in U Rang kleiner gleich 1 hat. Das Ziel der Aufgabe ist es $\dim(U) \leq 2$ zu beweisen. Dazu nehmen wir durch Widerspruch an, dass $\dim(U) = 3$ gilt. Zeigen Sie jetzt:

a) Sei $0 \neq A \in U$. Dann gibt es $T, S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie dies um zu zeigen, dass wir ohne Einschränkung $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ annehmen können.

b) Sei $B = (b_{i,j}) \in U$. Zeigen Sie, dass $b_{2,2} = 0$ gilt, indem Sie $\det(tE + B)$ für $t \in K$ betrachten. Folgern Sie daraus, dass $U \subseteq W$ ist, wobei $W := \{A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid a_{2,2} = 0\}$.

c) Zeigen Sie $U = W$ und nutzen Sie dies um einen Widerspruch zu erzeugen.