# Lineare Algebra II (WS 2017)
# Probeklausur

PD Dr. Jürgen Müller, M.Sc. Lucas Ruhstorfer

---

**Aufgabe 1: Größter gemeinsamer Teiler.** (2+2+2 Punkte)
Es seien

$$f := X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X] \quad \text{und} \quad g := X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X].$$

**a)** Man bestimme $\mathrm{ggT}(f, g) \subseteq \mathbb{Q}[X]$.

**b)** Für ein Element $d \in \mathrm{ggT}(f, g)$ gebe man Bézout-Koeffizienten $a, b \in \mathbb{Q}[X]$ mit $af + bg = d$ an.

**c)** Man schreibe $f$ als Produkt irreduzibler Polynome.

**Aufgabe 2: Diagonalisierbarkeit.** (2+2 Punkte)
Man untersuche die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in K^{3\times 3}$$

auf Diagonalisierbarkeit, und gebe gegebenenfalls eine zu $A$ ähnliche Diagonalmatrix $D \in K^{3\times 3}$ und eine Transformationsmatrix $P \in \mathrm{GL}_3(K)$ mit $P^{-1}AP = D$ an, und zwar

**a)** für den Körper $K = \mathbb{R}$,

**b)** für den Körper $K = \mathbb{C}$.

**Aufgabe 3: Jordan-Normalform.** (2+2+2+2+2 Punkte)
Für die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

**a)** Man bestimme das charakteristische Polynom von $A$.

**b)** Man bestimme die Eigenwerte von $A$, sowie ihre zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

**c)** Man gebe $\mathbb{C}$-Basen der Eigenräume und Haupträume von $A$ an.

**d)** Man bestimme die Jordan-Normalform $J$ von $A$, und gebe eine Transformationsmatrix $P$ mit $P^{-1}AP = J$ an.

**e)** Man bestimme das Minimalpolynom von $A$. Ist $A$ diagonalisierbar?

**Aufgabe 4: Ähnlichkeit.** (4 Punkte)
Es sei $K$ ein Körper. Man untersuche die folgenden Matrizen $A_1, \ldots, A_4 \in K^{4\times 4}$ paarweise auf Ähnlichkeit:

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_4 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Aufgabe 5: Orthonormalbasen.** (2+2 Punkte)
Es sei $V := \mathbb{R}^{3\times 1}$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Außerdem sei $U := \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}} \leq V$, wobei

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**a)** Man bestimme die zu $[v_1, v_2]$ gehörende Gram-Schmidt-Basis für $U$.

**b)** Man bestimme $U^\perp$, und gebe eine Orthonormalbasis für $U^\perp$ an.

**Aufgabe 6: Skalarprodukte.** (4 Punkte)
Es sei $V$ ein Euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man zeige: Jede orthogonale Teilmenge von $V \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{R}$-linear unahängig.