Lösungshinweise zur Nachklausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1

a) Es ist $b(x,y) = x^t A y$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b gemäß Vorlesung eine Bilinearform. Da A symmetrisch ist, so ist b eine symmetrische Bilinearform. Mithilfe des Hurwitzkriteriums sieht man leicht, dass A positiv definit ist.

b) Man rechnet leicht nach, dass b eine symmetrische Bilinearform ist. Sei $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$. Dann ist $M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist b positiv semidefinit.

Aufgabe 2

a) Da A eine Blockmatrix ist, so gilt $\chi_A = ((X+2)(X-2)+4) \cdot ((X-1)(X+1)+1) = X^4$. Somit ist A eine nilpotente Matrix.

b) Es ist $\mathrm{Eig}(A) = \langle (1,0,1,1), (1,1,0,0) \rangle$. Da A eine nilpotente Matrix ist, so gilt $\mathrm{Hau}(A,0) = \mathbb{R}^4$.

c) Wir haben $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$. Aus diesen Rechnungen ergibt sich zunächst

$$J_A = \begin{pmatrix} J(1,0) & 0 \\ 0 & J(3,0) \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen $\mathrm{Bild}(A) \cap \mathrm{Kern}(A) = \langle (1,1,0,0) \rangle$ und $\mathrm{Bild}(A^2) \cap \mathrm{Kern}(A) = \langle (1,1,0,0) \rangle$. Wir erhalten Jordanketten $(1,0,1,1)$ und $(0,0,0,1) \mapsto (1,3,-1,-1) \mapsto (2,2,0,0)$. Somit ergibt sich

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $T^{-1}AT = J_A$.

d) Aus Teil c) erhält man $\mu_A = X^3$.

Aufgabe 3

a) Man erhält $\chi_A = X^3 + 9X^2 - 108 = (X+6)^2(X-3)$.

b) Es ist $\mathrm{Eig}(A,-6) = \langle (-1,0,2), (1,1,0) \rangle$ und $\mathrm{Eig}(A,3) = \langle (2,-2,1)$.

c) Mithilfe des Gram-Schmidt Algorithmus bestimmt man eine Orthonormalbasis der Eigenvektoren. Es ist $\mathrm{Eig}(A,-6) = \langle \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2), \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,5,2) \rangle$ und $\mathrm{Eig}(A,3) = \langle \frac{1}{3}(2,-2,1) \rangle$. Somit ist $(\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2), \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,5,2), \frac{1}{3}(2,-2,1))$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Aufgabe 4

Es ist $\chi_{A_1} = (X+1)(X-1) = \chi_{A_3} = (X+1)(X-1)$ und $\chi_{A_2} = (X-1)^2 = \chi_{A_4}$. Damit sieht man $J_{A_1} = J_{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\mu_{A_2} \in \{X-1, (X-1)^2\}$. Man sieht aber direkt, dass $A_2 - E_2 \neq 0$ ist. Somit ist $\mu_{A_2} = (X-1)^2$ und damit $J_{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit dem selben Argument sieht man, dass $J_{A_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir wissen, dass Matrizen, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, genau dann ähnlich sind, wenn sie die gleiche Jordan Normalform haben. Somit sind A_1 und A_3 ähnlich, sowie A_2 und A_4.

Aufgabe 5

Wir setzen $n_1 := \dim(V_1)$ und $n_2 := \dim(V_2)$. Sei $\mathcal{B}_1$ eine Basis von V_1 und $\mathcal{B}_2$ eine Basis von V_2. Dann ist $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eine Basis von V und $M_{\mathcal{B}}(f)$ ist eine Diagonalmatrix mit $0 \neq n_1$-mal dem Skalar μ_1 und $0 \neq n_2$-mal dem Skalar μ_2. Es ergibt sich somit

$$\chi_A = (X - \mu_1)^{n_1}(X - \mu_2)^{n_2} \text{ und } \mu_A = (X - \mu_1)(X - \mu_2).$$

Aufgabe 6

a) Diese Aussage ist falsch. Sei $0 \neq x = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $(x, x) = 0$.

b) Diese Aussage ist wahr. Wegen $f^2 = \lambda^2 \cdot \mathrm{id}_V$ ist μ_f ein Teiler von $X^2 - \lambda^2 = (X - \lambda)(X + \lambda)$. Da $\lambda \neq 0$ ist, so folgt daraus, dass μ_f in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Somit ist f diagonalisierbar.

c) Diese Aussage ist wahr. Es ist $(f+g)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^i g^{n-i}$. Sei $m \geq 0$ mit $f^m = g^m = 0$. Dann gilt $f^{2m-i} = 0$ oder $g^{2m} = 0$ für alle $0 \leq i \leq 2m$. Somit ist $(f+g)^{2m} = 0$.

d) Diese Aussage ist richtig. Da A symmetrisch ist, so gibt es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Somit gilt $T^{-1}A^2T = T^{-1}ATT^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$. Damit sind alle Eigenwerte der symmetrischen Matrix A^2 größer gleich 0. Wegen $\mathrm{Rang}(A) = n$, gilt $\lambda_i^2 > 0$ für alle $1 \leq i \leq n$. Somit ist A^2 positiv definit.

Aufgabe 7

a) Dies rechnet man leicht nach.

b) Gemäß Vorlesung existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ von V mit $w_1 = \frac{v}{||v||}$. Insbesondere gilt $w_i \perp v$ für alle $i \geq 2$. Somit erhalten wir $\pi_v(w_1) = 1$ und $\pi_v(w_i) = 0$ für alle $2 \leq i \leq n$. Es ist also $M_{\mathcal{B}}(\pi_v) = \mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

c) Sei $w \in V$ beliebig. Es ist $f(\pi_v(w)) = \frac{\langle v,w \rangle}{\langle v,v \rangle} f(v)$ und $\pi_{f(v)}(f(w)) = \frac{\langle f(v),f(w) \rangle}{\langle f(v),f(v) \rangle} f(v)$. Da f eine orthogonale Abbildung ist, so gilt $\langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle$ und $\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$. Damit ist also $\pi_{f(v)}(f(w)) = f(\pi_v(w))$ für alle $w \in V$. Dies zeigt $f \circ \pi_v = \pi_{f(v)} \circ f$.