Nachklausur zur Linearen Algebra II
Wintersemester 2016/2017
06.04.2017, 14:30 - 16:30 Uhr

Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte tragen Sie die folgenden Daten leserlich und in Blockschrift ein:

Name	Vorname	Matrikelnummer
Geburtsort	Geburtsdatum	Studiengang

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Max. Punktzahl	4	4	4	2	2	4	4	24	
erreichte Punktzahl									

Es gelten die Notationen aus der Vorlesung. Alle Beweis- und Rechenschritte müssen erläutert werden.

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Abbildungen $b : V \times V \to \mathbb{R}$ um Bilinearformen auf V handelt. Untersuchen Sie diese zudem auf Symmetrie und Definitheit.

a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und betrachten Sie die Abbildung $b : V \times V \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$.

b) Sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad}(p) \leq 2\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellwertigen Polynome, deren Grad höchstens zwei ist. Betrachten Sie $b : V \times V \to \mathbb{R}$, $(p, q) \mapsto p(0) \cdot q(0)$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenräume und Haupträume der Matrix A.

c) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass $T^{-1}AT$ in Jordanscher Normalform vorliegt.

d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A.

b) Bestimmen Sie alle Eigenräume von A.

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Hinweis: Alle Eigenwerte sind ganzzahlig.

Aufgabe 4

Welche der folgenden reellen Matrizen sind ähnlich?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $V = V_1 \oplus V_2$ für zwei Untervektorräume $\{0\} \neq V_1, V_2 \subset V$. Seien $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ zwei verschiedene Skalare mit $f(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ für alle $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von f.

Aufgabe 6

Seien V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $f^2 = \lambda^2 \cdot \mathrm{id}_V$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ist f diagonalisierbar.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Dann ist die Matrix A^2 positiv definit.

c) Sei f nilpotent und sei $g \in \mathrm{End}(V)$ ein weiterer nilpotenter Endomorphismus, so dass $f \circ g = g \circ f$. Dann ist auch $f + g$ nilpotent.

d) Durch $(x, y) := x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ wird ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

Aufgabe 7

Seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ eine orthogonale Abbildung. Für einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ definiere $\pi_v : V \to V$ durch $\pi_v(w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle} \cdot v$.

a) Zeigen Sie, dass π_v für alle $v \in V \setminus \{0\}$ eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass π_v für alle $v \in V \setminus \{0\}$ diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

c) Zeigen Sie, dass $f \circ \pi_v = \pi_{f(v)} \circ f$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.