Aufgabe 1

a) Der Rang von A_λ ist 4, falls $\lambda \neq 3$. Wenn $\lambda = 3$ ist, so ist der Rang von A_λ gleich 3.

b) Das Gleichungssystem $A_\lambda \cdot x = b$ hat keine Lösung für $\lambda = 3$. Für $\lambda \neq 3$ ist die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems durch

$$x = (-4 + 3\frac{9}{3-\lambda}, 4 - \frac{9}{3-\lambda}, -3 - \frac{9}{3-\lambda}, \frac{9}{3-\lambda})$$

gegeben.

Aufgabe 2

a) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) = \langle (1,-2,0,1), (0,2,1,0) \rangle$ und $\mathrm{Bild}(f) = \langle (1,-2,-2,1), (1,0,0,1) \rangle$.

b) Es ist $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \langle (1,2,2,1) \rangle$.

c) Es ist $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) \neq 0 \text{ und } f^2(x) = 0\}$.

Aufgabe 3

Es ist $\det(A) = 63$.

Aufgabe 4

Wähle zum Beispiel $U_1 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$ und $U_2 = \langle (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$. Es ist $(0,0,1,1) \in U \cap U_2$, aber $(0,0,1,0) \notin U$. Somit folgt $\dim(U \cap U_2) = 1$. Man zeigt, dass $U \cap U_1 = \{0\}$ gilt. Damit folgt $\dim(U \cap U_1) = 0$.

Aufgabe 5

a) Wir rechnen die Unterraumaxiome nach. Dabei nutzen wir aus, dass $f : V \to V$ eine **lineare** Abbildung ist.

   a) $0 \in \mathrm{Fix}(f)$, da $f(0) = 0$.
   b) Seien $x, y \in \mathrm{Fix}(f)$. Dann gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) = x + y$ und somit $x + y \in \mathrm{Fix}(f)$.
   c) Seien $x \in \mathrm{Fix}(f)$ und $\lambda \in K$. Dann gilt $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda x$ und somit $\lambda x \in \mathrm{Fix}(f)$.

b) Man zeigt, zunächst $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Fix}(g)$, indem man $g(x) = x$ für die Elemente x aus $\mathcal{A}$ nachrechnet. Da $\mathcal{A}$ ein System linear unabhängiger Vektoren ist, so folgt $\dim(\mathrm{Fix}(g)) \geq 2$. Es gilt aber $\mathrm{Fix}(g) \neq \mathbb{R}^3$, da g nicht die Identität ist. Somit gilt $\dim(\mathrm{Fix}(g)) < 3$ und damit ist $\dim(\mathrm{Fix}(g)) = 2$. Dies zeigt, dass $\mathcal{A}$ bereits ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Fix}(g)$ und damit eine Basis ist.

c) Sei $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$, wobei $x_1 = (9,0,1)$, $x_2 = (2,-1,0)$ und $x_3 = (1,0,0)$. Man rechnet nach, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist die $\mathcal{A}$ enthält. Ferner gilt $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$ und $g(x_3) = 2x_1 - 8x_2 + 6x_3$. Somit ergibt sich

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

d) Es gilt $\det(M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)) = 6 \neq 0$. Somit ist die Abbildung g invertierbar. Ferner gilt

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g^{-1}) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

a) Die Aussage ist wahr.

b) Die Aussage ist wahr. Wähle beispielsweise $U = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle$.

c) Die Aussage ist falsch. Betrachte $f : K \to K^2; x \mapsto (x,x)$ und $g : K^2 \to K; (x,y) \mapsto x$. Dann gilt $f \circ g = id$, aber $g \circ f$ ist nicht invertierbar.

d) Die Aussage ist wahr. Falls etwa $v = \lambda w$, dann gilt $1 = f(v) = f(\lambda w) = \lambda f(w) = \lambda$ und somit $v = w$.

Aufgabe 7

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach der Anzahl $n = 1$ der Vektoren. Die Aussage für $n = 1$ ist klar, da ein Vektor $0 \neq v_1$ immer linear unabhängig ist. Nach Induktionsvoraussetzung können wir also annehmen, dass $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind. Sei also

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = 0$$

eine Darstellung des Nullvektors. Wir müssen zeigen, dass $\mu_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Angenommen nicht. Da $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind, muss $\mu_n \neq 0$ gelten. Auflösen nach v_n liefert also

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_i}{\mu_n} v_i.$$

Setze $\kappa_i = \frac{\mu_i}{\mu_n}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Durch Anwenden der Abbildung f erhalten wir

$$\lambda_n v_n = f(v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \lambda_i v_i.$$

Andererseits gilt aber auch

$$\lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \lambda_n v_i.$$

Durch Vergleichen dieser beiden Ausdrücke erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i (\lambda_n - \lambda_i) v_i.$$

Da $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig und $\lambda_n \neq \lambda_i$ für $i \neq n$ gilt, so folgt $\kappa_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Damit sieht man aber, dass $\mu_n = 0$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme.