Lösungshinweise zur Klausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1

Es ist $U = \langle (1,1,0,0),(1,0,-1,1)\rangle$ und $U^\perp = \langle (0,0,1,1),(1,-1,1,0)\rangle$. Durch das Gram–Schmidt Verfahren erhält man $U^\perp = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-2,1,-1)\rangle$.

Aufgabe 2

a) Es ist $b(x,y) = x^t Ay$, für alle $x,y \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist b gemäß Vorlesung eine Bilinearform. Da A symmetrisch ist, so ist b eine symmetrische Bilinearform.

b) Zunächst gilt $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-3)$ für das charakteristische Polynom von A. Man sieht: $\mathrm{Eig}(A,1) = \langle (0,1,0)\rangle$, $\mathrm{Eig}(A,-1) = \langle (1,0,-1)\rangle$ und $\mathrm{Eig}(A,3) = \langle (1,0,1)\rangle$. Wir definieren

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(3).$$

Es ist $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(1,-1,3)$. Wenn wir $S = T \cdot \mathrm{diag}(1, 1\frac{1}{\sqrt{3}})$ setzen, so erhalten wir $S^tAS = \mathrm{diag}(1,-1,1)$. Die gesuchte Basis ist $\mathcal{B} = ((0,1,0),(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\frac{-1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}))$.

c) Da A sowohl positive also auch negative Eigenwerte hat, so ist b indefinit.

Aufgabe 3

a) Die Matrix A ist unitär und damit diagonalisierbar.

b) Es gilt $\chi_B = X^3$. Damit ist $0 \neq B$ nilpotent und somit nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 4

a) $\chi_A = ((X-5)(X+1)+9)\cdot((X+2)(X-4)+8)) = X(X-2)^3$.

b) Es ist $\mathrm{Eig}(A,0) = \langle (0,0,2,-1)\rangle$ und $\mathrm{Eig}(A,2) = \langle (-3,1,0,0),(0,0,1,-1)\rangle$.

c) Wir haben $\mathrm{Eig}(A,0) = \mathrm{H}(A,0)$. Es ist $\mathrm{H}(A,2) = \mathrm{Kern}((A-2E_4)^2) = \langle (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\rangle$. Damit folgt

$$J_A = \begin{pmatrix} J(2,2) & 0 & 0 \\ 0 & J(1,2) & 0 \\ 0 & 0 & J(1,0) \end{pmatrix}.$$

Wir definieren

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$(A - 2E_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Indem wir also

$$T = T_1 \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

setzen, erhalten wir

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Das Minimalpolynom von A ist durch $\mu_A = X(X-2)^2$ gegeben.

Aufgabe 5

a) Es ist $0 = (f^2 + 2f + \mathrm{id}_V) \circ (f^2 - 2f + \mathrm{id}_V) = (f + \mathrm{id}_V) \circ (f - \mathrm{id}_V)^2$. Somit ist μ_f ein Teiler von $(X+1)^2(X-1)^2$. Damit sind -1 und 1 mögliche Eigenwerte von f. Die Jordansche Normalform von f kann Jordanblöcke der Größe 1 und 2 (jeweils zu beiden möglichen Eigenwerten) haben.

b) Da $\mathrm{Rang}(f - \mathrm{id}_V) = 4$, also $\dim \mathrm{Eig}(f, 1) = 1$ ist, so gibt es einen Jordanblöcke zum Eigenwert 1. Analog sieht man ein, dass es zwei Blöcke zum Eigenwert -1 geben muss. Daher sind folgende zwei Jordansche Normalformen von f möglich:

$$\begin{pmatrix} J(2,-1) & 0 & 0 \\ 0 & J(2,-1) & 0 \\ 0 & 0 & J(1,1) \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} J(2,-1) & 0 & 0 \\ 0 & J(1,-1) & 0 \\ 0 & 0 & J(2,1) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

a) Diese Aussage ist wahr: Sei $x \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ. Dann gilt $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$.

b) Diese Aussage ist wahr: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$, so dass $M_{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{-1, 1\}$ ist. Folglich gilt $M_{\mathcal{B}}(f^2) = M_{\mathcal{B}}(f)^2 = E_{\dim(V)}$. Dies zeigt, dass $f^2 = \mathrm{id}_V$ ist.

c) Diese Aussage ist falsch. Die Abbildung $f : K^{2\times 2} \to K^{2\times 2}$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x$ ist nicht diagonalisierbar, aber $f^2 = 0_V$ ist offensichtlich diagonalisierbar.

d) Diese Aussage ist wahr: Es ist $(v, w) = v^t A w$, wobei $A = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$. Da A offensichtlich symmetrisch und positiv definit ist, so ist $(\, , \,)$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 7

a) Dies folgt direkt aus der Bilinearität von $\langle \, , \, \rangle$ und der Linearität von f.

b) Seien $(x, y) \in V \times V$ und $(x', y') \in V \times V$ mit $x - x' \in \text{Kern}(f)$ und $y - y' \in \text{Kern}(f)$. Dann gilt $f(x) = f(x')$ und $f(y) = f(y')$. Folglich ist $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle f(x'), f(y')\rangle$. Dies zeigt, dass die Abbildung s wohldefiniert ist. Nun ist offensichtlich, dass s eine symmetrische Bilinearform auf $V/\text{Kern}(f)$ definiert.

Es ist $\langle f(x), f(x)\rangle \geq 0$ und $\langle f(x), f(x)\rangle = 0$ genau dann wenn $f(x) = 0$. Daher ist s ein Skalarprodukt auf $V/\text{Kern}(f)$.