Bergische Universität Wuppertal
Dr. Thorsten Weist
M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Es ist

a) $J_{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $J_{A_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $J_{A_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2

a) Es ist

$$T_1^{-1} A_1 T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } T_2^{-1} A_2 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

für geignete orthogonale Matrizen $T_i \in \mathcal{O}(4)$.

b) Setze

$$S_1 = T_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } S_2 = T_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$S_1^t A_1 S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } S_2^t A_2 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Aus den vorherigen Aufgabenteilen folgt, dass A_1 positiv definit und A_2 indefinit ist.

Aufgabe 3

a) Das Gram–Schmidt Verfahren liefert $(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0), \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,2,5), \frac{1}{3}(2,-1,2))$.

b) Durch geschicktes Rechnen erhält man $U = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, wobei $x_1 = (-4,0,3,1,-1)$, $x_2 = (0,4,0,-1,-1)$ und $x_3 = (3,0,4,1,0)$.

Die ersten beiden Vektoren x_1 und x_2 sind orthogonal zueinander. Wir setzen

$$x_3' = x_3 - \frac{\langle x_2, x_3 \rangle}{||x_2||^2} x_2 - \frac{\langle x_1, x_3 \rangle}{||x_1||^2} x_1 = (\frac{85}{27}, \frac{2}{9}, \frac{35}{9}, \frac{49}{54}, \frac{-1}{54})$$

Damit bilden die Vektoren $\frac{x_1}{||x_1||}, \frac{x_2}{||x_2||}, \frac{x_3'}{||x_3'||}$ eine Orthonormalbasis von U.

Um nun eine Basis von $U^\perp$ zu bestimmen, berechnen wir den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\mathrm{Kern}(A) = \langle (-16,25,12,0,100), (4,25,-28,100,0) \rangle = U^\perp$.

Aufgabe 4

Es ist $\chi_f = (X-1)^n (X+1)^n$ und $\mu_f = (X-1)(X+1)$.

Aufgabe 5

a) Diese Aussage ist wahr. Jede komplexe 3×3 Matrix A hat eine Jordan Normalform. Fallunterscheidung nach der Anzahl der verschiedenen Eigenwerte von A zeigt, dass diese eindeutig durch μ_A und χ_A gegeben ist.

b) Diese Aussage ist wahr. Sei $x_1, \dots, x_n$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle \, , \, \rangle$ und $y_1, \dots, y_n$ eine Orthonormalbasis bezüglich $(\, , \,)$. Definiere $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $f(x_i) = y_i$.

c) Die Aussage ist falsch. Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind diagonalisierbar, aber ihre Summe ist nicht diagonalisierbar.

d) Diese Aussage ist falsch. Die Matrix $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalierbar, aber $\chi_{E_2} = (X-1)^2$.

e) Diese Aussage ist falsch. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2)$ ist nicht diagonalisierbar.

f) Diese Aussage ist wahr. Definiere $\varphi : W \to V/U$, $w \mapsto w + U$. Man rechnet leicht nach, dass φ ein Isomorphismus ist.

g) Die Aussage ist wahr. Man rechnet die geforderten Eigenschaften nach.

Aufgabe 6

$(i) \implies (ii)$: Da s nilpotent ist, so ist $\chi_s(s) = s^{\dim(V)}$ und wir finden eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}}(s)$ eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Damit ist $M_{\mathcal{B}}(f) = E_{\dim(V)} + M_{\mathcal{B}}(s)$ und wir sehen, dass $\chi_f = (X-1)^{\dim(V)}$.

$(ii) \implies (iii)$: Dies ist klar, da μ_f ein Teiler von χ_f ist.

$(iii) \implies (i)$: Da $\mu_f = (X-1)^n$ ist, so zerfällt χ_f und f besitzt eine Jordan Normalform. Also gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}}(f) = E_n + A$ wobei A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist. Wir definieren $s : V \to V$ durch $s(v_i) = A \cdot v_i$.

Aufgabe 7

a) Wir definieren $s(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. Dies definiert eine eindeutige Bilinearform $s : V \times V \to \mathbb{R}$, da $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

b) Es ist $M_{\mathcal{E}}(s) = T^t_{\mathcal{E},\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(s) T_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = T^t_{\mathcal{E},\mathcal{B}} T_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9

Für $t = 0$ ist A_0 bereits eine Diagonalmatrix. Für $t \neq 0$ setzen wir

$$S_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$S_t^{-1} A_t S_t = \begin{pmatrix} 1+t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10

Es ist $s(x,y) = x^t A y$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Da A symmetrisch ist, so ist s symmetrisch. Man rechnet (etwa mit dem Hauptminoren-Kriterium) nach, dass A positiv definit ist. Damit ist s ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

Durch Anwenden des Gram-Schmidt Verfahrens bezüglich des Skalarprodukts s auf die Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ erhalten wir $(e_1, e_2 - e_1, e_3 - e_2 + e_1)$. Dies ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bezüglich s.

Aufgabe 11

$(iii) \Rightarrow (i)$: Seien $x, y \in V$ mit $\langle x, y\rangle = 0$. Dann gilt

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2 \langle g(x), g(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle = 0,$$

da g orthogonal bzw. unitär ist.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Seien $x, y \in V$ mit $||x|| = ||y||$.

Wir nehmen zunächst an, dass $x \perp y$ gilt. Damit erhalten wir

$$\langle x + y, x - y\rangle = |||x||^2 - ||y||^2 = 0.$$

Damit folgt $\langle f(x + y), f(x - y)\rangle = 0$ nach (i). Somit gilt

$$||f(2x)||^2 = ||f(x + y + x - y)||^2 = ||f(x + y)||^2 + ||f(x - y)||^2.$$

Durch Vertauschen der Rollen von x und y sieht man

$$||f(2y)||^2 = ||f(x + y + y - x)||^2 = ||f(x + y)||^2 + ||f(x - y)||^2.$$

Damit folgt $||f(2x)||^2 = ||f(2y)||^2$, was $||f(x)|| = ||f(y)||$ beweist.

Seien nun $x, y \in V$ beliebig mit $||x|| = ||y||$. Wähle eine Orthonormalbasis $x_1, \ldots, x_n$ von V. Sei $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ und $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Es ist $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$ und $||y|| = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2$. Gemäß (i) ist

$$||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 ||f(x_i)||.$$

Da $x_i \perp x_j$ ist, erhalten wir $||f(x_i)|| = ||f(x_j)||$. Es folgt

$$||f(x)||^2 = ||f(x_1)|| \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = ||f(x_1)|| \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2 ||f(x_i)|| = ||f(y)||^2.$$

Somit gilt $||f(x)|| = ||f(y)||$ wie behauptet.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Wähle $0 \neq x_0 \in V$ beliebig und setze $\lambda = \frac{||f(x_0)||}{||x_0||} \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach (ii) wissen wir, dass $\lambda = \frac{||f(x)||}{||x|||}$ für alle $0 \neq x \in V$ gilt. Setze $g = \frac{1}{\lambda} f : V \to V$. Sei $x \in V$ beliebig. Dann ist $||g(x)|| = \frac{1}{\lambda} ||f(x)|| = ||x||$. Somit ist g eine orthogonale bzw. unitäre Abbildung.

Aufgabe 12

$(ii) \Rightarrow (i)$: Es reicht zu zeigen, dass die Jordanform einer Matrix A mit $\mu_A = p$ eindeutig bestimmt ist.

Sei $\mu_A = (X - \lambda)$. Dann ist

$$J_A = \begin{pmatrix} J(1,\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(1,\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J(1,\lambda) \end{pmatrix}$$

Sei $\mu_A = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ für paarweise verschiedene $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$J_A = \begin{pmatrix} J(m_1,\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(m_2,\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J(m_r,\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Sei $\mu_A = (X - \lambda)^{n-1}$ Dann ist

$$J_A = \begin{pmatrix} J(n-1,\lambda) & 0 \\ 0 & J(1,\lambda) \end{pmatrix}.$$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Wir zeigen, dass wenn p nicht von der in (ii) angegeben Formen ist, dass es zwei nichtähnliche Jordanformen mit Minimalpolynom p gibt. Sei $p = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$ mit λ_i paarweise verschiedenen und $1 < \deg(p) = \sum_{i=1}^{r} m_i < n$. Sei $k = n - \sum_{i=1}^{r} m_i$.

Sei zunächst $r > 1$. Wir definieren

$$J = \begin{pmatrix} J(m_1,\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(m_2,\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J(m_r,\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $l \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A(l,\lambda) = \begin{pmatrix} J(1,\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(1,\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J(1,\lambda) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{l \times l}.$$

Dann haben die Matrizen

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & A(k,\lambda_1) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & A(k,\lambda_2) \end{pmatrix}$$

Minimalpolynom p, aber sind nicht ähnlich.

Sei nun $r = 1$ und zusätzlich $\deg p < n - 1$. In diesem Fall sind die Matrizen

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & A(k,\lambda_1) \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & A(k-2,\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & J(2,\lambda_1) \end{pmatrix}$$

nicht ähnlich.