Lösungshinweise zur Probeklausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1

a) $\mathrm{ggT}(f, g) = \mathbb{Q}^* \cdot (X + 1)$

b) $X + 1 = (1 - X) \cdot f + X \cdot g$

c) $f = (X + 1) \cdot (X^2 + 1)$

Aufgabe 2

a) Es gilt $\chi_A = X \cdot (X^2 + 1)$. Also zerfällt χ_A über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren und damit ist A nicht diagonalisierbar.

b) Für $P = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(0, i, -i)$.

Aufgabe 3

a) Es gilt $\chi_A = (X - 1)^3 \cdot X$.

b) $0, 1$ sind die Eigenwerte von A. Es gilt $\nu_1(A) = 3, \nu_0(A) = 1$ und $\gamma_1(A) = 2, \gamma_0(A) = 1$.

c)
- Es ist $T_X(A) = T_0(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $T_{X-1} = T_1(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.
- $T_0(A)$ ist der Hauptraum zum Eigenwert 0 und $T_{(X-1)^2}(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ ist der Hauptraum zum Eigenwert 1.

d) Für $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $P^{-1}AP = J_2(1) \oplus J_1(1) \oplus J_1(0)$.

e) Es ist $\mu_A = (X - 1)^2 \cdot X$. Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 4

Die Matrizen A_1 und A_2 sind ähnlich. Außerdem sind A_3 und A_4 ähnlich. Die Matrizen A_1 und A_3 sind nicht ähnlich.

Aufgabe 5

a) $U = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

b) $U^\perp = \langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

Aufgabe 6

Seien $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ paarweise orthogonal. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0$. Nun gilt

$$0 = \langle 0, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle = \lambda_j ||v_j||^2.$$

Da $v_j \neq 0$, so gilt $\lambda_j = 0$. Somit sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.