Bitte beachten Sie: Aufgabe 4 ist eine Präsenzaufgabe und wird **nicht korrigiert**.

Aufgabe 1
Man bestimme jeweils das charakteristische und das Minimalpolynom, sowie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen in $\mathbb{C}^{3\times 3}$, zusammen mit geeigneten Transformationsmatrizen. Welche der Matrizen sind diagonalisierbar?

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2
Man bestimme jeweils das charakteristische und das Minimalpolynom, sowie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen in $\mathbb{C}^{3\times 3}$, zusammen mit geeigneten Transformationsmatrizen. Welche der Matrizen sind diagonalisierbar?

a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3
Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Eine Matrix $[a_{ij}]_{ij} \in K^{n\times n}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle $i \leq j$ heißt eine **echte (untere) Dreiecksmatrix**. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **nilpotent**, falls es $m \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $A^m = 0$. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) A ist ähnlich zu einer echten Dreiecksmatrix.

(ii) A ist nilpotent.

(iii) Es ist $\mu_A = X^l$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$.

(iv) Es ist $\chi_A = X^n$.

Aufgabe 4 (0 Punkte)
Es seien K ein Körper, $V := K^{n\times 1}$ und $A \in K^{n\times n}$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Man zeige: $\mathrm{Kern}(A^i)$ und $\mathrm{Bild}(A^i)$ sind A-invariante Teilräume von V, und für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathrm{Bild}(A^i) \geq \mathrm{Bild}(A^{i+1})$ und $\mathrm{Kern}(A^i) \leq \mathrm{Kern}(A^{i+1})$ sowie

$$\dim_K(\mathrm{Kern}(A^{i+1})) - \dim_K(\mathrm{Kern}(A^i)) \geq \dim_K(\mathrm{Kern}(A^{i+2})) - \dim_K(\mathrm{Kern}(A^{i+1})).$$

b) Es sei $m := \min\{i \in \mathbb{N}_0; \mathrm{Kern}(A^i) = \mathrm{Kern}(A^{i+1})\}$. Man zeige: Es gilt $\mathrm{Kern}(A^m) = \mathrm{Kern}(A^{m+i})$ und $\mathrm{Bild}(A^m) = \mathrm{Bild}(A^{m+i})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, sowie $\dim_K(V) \leq m \cdot \dim_K(\mathrm{Kern}(A))$.

c) Man zeige: Es gilt $V = \mathrm{Kern}(A^m) \oplus \mathrm{Bild}(A^m)$. Man bestimme das Minimalpolynom von $\varphi_A|_{\mathrm{Kern}(A^m)}$, und zeige, dass $\varphi_A|_{\mathrm{Bild}(A^m)}$ invertierbar ist.