**Aufgabe 1**
Es sei $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für die folgende Matrix berechne man das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, ihre geometrischen und algebraischen Vielfachheiten, sowie die Eigenräume, und untersuche sie auf Diagonalisierbarkeit:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_4(K)$$

**Aufgabe 2**
Es sei $A := \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$.

a) Man zeige: $A$ ist diagonalisierbar.

b) Man berechne $A^{15} \in M_2(\mathbb{Q})$ unter Verwendung von höchstens zwei Matrixmultiplikationen.

**Aufgabe 3**
Sei $\mathbb{R}[X]_{\leq n} := \{f \in \mathbb{R}[X]; f = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(f) \leq n\}$ der Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich $n$ mit Basis $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$. Betrachten Sie die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n};\ f \mapsto f',$$

die ein Polynom auf seine formale Ableitung abbildet.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi^{n+1} = 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\varphi$ linear ist und bestimmen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte mit ihren geometrischen und algebraischen Vielfachheiten, sowie die Eigenräume von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Ist die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ diagonalisierbar?

**Aufgabe 4**
Seien $U_1$, $U_2 \ldots$, $U_r$ Untervektorräume eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $\sum_{i=1}^{r} U_i = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$.

b) Für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0_V\}$.

c) $\dim(\sum_{i=1}^{r} U_i) = \sum_{i=1}^{r} \dim(U_i)$.