Übungen zur Linearen Algebra II | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 14 | PD Dr. Jürgen Müller
keine Abgabe | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Bitte beachten Sie, dass dieses Übungsblatt zur Wiederholung gedacht ist und nicht bewertet wird.

Aufgabe 1
Man bestimme jeweils das charakteristische und das Minimalpolynom, sowie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen, zusammen mit geeigneten Transformationsmatrizen.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$

Aufgabe 2
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

und Φ die von A definierte Bilinearform $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y) \mapsto {}^t x A y$. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$, so dass $G_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\Phi)$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{0, \pm 1\}$ ist. Nutzen Sie dazu a) einmal das Orthogonalisierungsverfahren von Bilinearformen und b) die Hauptachsentransformation.

Aufgabe 3
Man betrachte den Euklidischen Vektorraum $M_2(\mathbb{R})$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}({}^t A \cdot B)$.

a) Man bestimme eine Orthonormalbasis von $M_2(\mathbb{R})$.

b) Man betrachte die K-lineare Abbildung

$$\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}),\ A \mapsto {}^t A.$$

Man bestimme die zu φ adjungierte Abbildung $\varphi^* : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.

c) Gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $M_2(\mathbb{R})$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist?

Aufgabe 4

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich n, mit $\mathbb{R}$-Basis $P_n := \{p_0, \dots, p_n\}$, wobei $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$.

a) Man zeige: $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

b) Man bestimme die zu P_4 gehörige Gram-Schmidt-Basis von $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.