Bitte beachten Sie: Aufgabe 4 ist eine Präsenzaufgabe und wird **nicht korrigiert**.

Aufgabe 1
Sei $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für eine Matrix $X \in K^{2\times 2}$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\psi_X : K^{2\times 2} \to K^{2\times 2}, Y \mapsto X \cdot Y.$$

Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$.

a) Bestimmen Sie die Jordan-Normalformen J_A und J_B der Matrizen A und B.

b) Bestimmen Sie die Jordan-Normalformen J_{ψ_A} und J_{ψ_B} der linearen Abbildungen ψ_A und ψ_B. Was fällt Ihnen auf?

c) Zeigen Sie, dass $J_{\psi_X} = J_X \oplus J_X$ gilt.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie Vertreter der Ähnlichkeitsklassen von Matrizen in $\mathbb{C}^{4\times 4}$, die die Gleichung $A^4 = 2A^2$ erfüllen.

b) Entscheiden Sie, ob es für $n \geq 2$ eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^2 = J_n(0)$ gibt.

Aufgabe 3
Es seien $[K, \alpha] \in \{[\mathbb{R}, \mathrm{id}], [\mathbb{C}, \bar{\ }]\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $V := K^{n\times n}$.

a) Man zeige: Durch $\Phi(A, B) := \mathrm{Spur}(A^\alpha B) \in K$ wird eine hermitesche nicht-ausgeartete α-Sesquilinearform auf V definiert.

b) Es sei $U_\epsilon := \{A \in V; {}^tA = \epsilon A\}$, wobei $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Man zeige: Es gilt $U_\epsilon \leq V$ mit $(U_\epsilon)^\perp = U_{-\epsilon}$, sowie $V = U_1 \oplus U_{-1}$.

Aufgabe 4 (0 Punkte)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\delta, \epsilon \in K$ die Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 & 0 \\ \delta & \epsilon & 1 & 0 \\ 0 & \delta & \epsilon & 1 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4}.$$