Übungen zur Linearen Algebra II — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 1 — PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 19.10.2017, 16 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Seien $\mathcal{A} = (e_1, e_2, e_3)$ bzw. $\mathcal{A}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ und

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ bzw. } \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

zwei weitere Basen. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y + z \\ x + 2y + 3z \\ x - 2y + 3z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(\varphi)$, $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}'}(\varphi)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ für $n \geq 1$:

a) $a_{ii} = 2$ und $a_{ij} = 1$ für $i \neq j$.

b) $a_{ii} = 2$ und $a_{ij} = -1$ für $|i - j| = 1$, sowie $a_{ij} = 0$ für $|i - j| \geq 2$.

Aufgabe 3

Seien R ein Ring und $a, b \in R$. Zeigen Sie durch Benutzen der Ringaxiome folgende Rechenregeln:

a) $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$,

b) $(-1) \cdot a = -a = a \cdot (-1)$,

c) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring. Sei $0 \neq a \in R$ und betrachten Sie die Abbildung $\lambda_a : R \to R$, $x \mapsto a \cdot x$.

a) Zeigen Sie, dass a genau dann **kein** Nullteiler ist, wenn λ_a injektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass a genau dann eine Einheit ist, wenn λ_a bijektiv ist.

c) Folgern Sie: Wenn R ein Ring mit endlich vielen Elementen ist, dann ist jedes Element ungleich 0 entweder ein Nullteiler oder eine Einheit.