Aufgabe 1
Sei K ein Körper. Seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $a_1, \ldots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

Determinante $\prod\limits_{i,j \in \{1,\ldots,n\}\colon i<j} (a_j - a_i)$ hat. Insbesondere ist die Matrix A genau dann invertierbar, wenn $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschieden sind.

Aufgabe 2
Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit Basis $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und Basis $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Sei $\sigma : V \to V$ die Spiegelung an der Ursprungsgerade, die durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ geht. Überlegen Sie sich, warum $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gelten. Folgern Sie daraus, dass $\det(\sigma) = -1$ gilt.

b) Sei $\rho : V \to V$ die Drehung um den Winkel $\omega \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie sich, warum

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\rho) = \begin{pmatrix} \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ \sin(\omega) & \cos(\omega) \end{pmatrix}$$

gilt und nutzen Sie dies um $\det(\rho) = 1$ zu zeigen.