Lemma 1 *Seien V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt:*

1. *Es existiert genau ein $f^{\mathrm{ad}} \in \mathrm{End}(V)$, so dass $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f^{\mathrm{ad}}(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$.*
2. $\mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}}) = \mathrm{Kern}(f)^{\perp}$ *und* $\mathrm{Kern}(f^{\mathrm{ad}}) = \mathrm{Bild}(f)^{\perp}$.
3. *Für alle Orthonormalbasen $\mathcal{B}$ von V gilt $M_{\mathcal{B}}(f) = \overline{M_{\mathcal{B}}(f)}^{t}$.*

Beweis. Der erste Teil folgt völlig analog zu Satz 9.25. Der zweite Teil folgt wie Lemma 9.27 bzw. kann man das auch direkt nachrechnen: sei $w \in \mathrm{Bild}(f)^{\perp}$. Dann gilt für alle $v \in V$, dass

$$0 = \langle f(v), w\rangle = \langle v, f^{\mathrm{ad}}(w)\rangle.$$

Da ein Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, folgt also $w \in \mathrm{Kern}(f^{\mathrm{ad}})$. An dieser Gleichung sieht man auch, dass aus $w \in \mathrm{Kern}(f^{\mathrm{ad}})$ folgt, dass $w \in \mathrm{Bild}(f)^{\perp}$. Zusammen mit dem Rangsatz für lineare Abbildungen, folgt daraus auch bereits $\dim \mathrm{Bild}(f^{\mathrm{ad}}) = \dim \mathrm{Kern}(f)^{\perp}$. Da gilt, dass $\langle v, f^{\mathrm{ad}}(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle = 0$ für alle $v \in \mathrm{Kern}(f)$, folgt $f^{\mathrm{ad}}(w) \in \mathrm{Kern}(f)^{\perp}$, also die Behauptung.

Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Sei weiter

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} v_i, \quad f^{\mathrm{ad}}(v_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{j,i} v_j.$$

Dann gilt

$$\lambda_{i,j} = \langle f(v_j), v_i\rangle = \langle v_j, f^{\mathrm{ad}}(v_i)\rangle = \overline{\mu_{j,i}}.$$

□

Lemma 2 *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt* $\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Eig}(f^{\mathrm{ad}}, \overline{\lambda})$.

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von f. Definiere $g := f - \lambda \mathrm{id}_V$. Dann überlegt man sich leicht, dass $g^{\mathrm{ad}} = f^{\mathrm{ad}} - \overline{\lambda}\mathrm{id}_V$. Da f normal ist, folgt

$$g^{\mathrm{ad}} \circ g = f^{\mathrm{ad}} \circ f + \lambda\bar{\lambda}\mathrm{id}_V - \bar{\lambda} f - \lambda f^{\mathrm{ad}} = f \circ f^{\mathrm{ad}} + \bar{\lambda}\lambda \mathrm{id}_V - \bar{\lambda} f - \lambda f^{\mathrm{ad}} = g \circ g^{\mathrm{ad}}.$$

Also ist g normal und es gilt somit nach Bemerkung 9.31, dass $\mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Kern}(g^{\mathrm{ad}})$. Damit folgt

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \mathrm{Kern}(g) = \mathrm{Kern}(g^{\mathrm{ad}}) = \mathrm{Eig}(f^{\mathrm{ad}}, \overline{\lambda}).$$

□