Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 9 — Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 23.06.2016, 10 Uhr — M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

a) Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ x-y \end{pmatrix}$,

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4x+y \\ x-b \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild (inkl. der Dimension) der folgenden linearen Abbildungen:

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 3x_2, x_1 - x_2, x_1 - x_2 - x_3)$,

(ii) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4)$.

Aufgabe 2

Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass $f \circ f = f$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

b) $\mathrm{Bild}(f) + \mathrm{Kern}(f) = V$.

c) $\dim \mathrm{Bild}(f) + \dim \mathrm{Kern}(f) = \dim V$.

Aufgabe 3

Gibt es $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei a_i und b_i wie folgt gegeben sind?

a) $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 0, 1)$, $b_1 = (5, 7, 3)$, $b_2 = (11, 25, 2)$, $b_3 = (19, 1, 12)$.

b) $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (2, 5, 3)$, $b_1 = (1, 2, 1)$, $b_2 = (-2, 3, 2)$, $b_3 = (-4, 13, 8)$.

c) $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 3, -1)$, $a_3 = (4, 6, 2)$, $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 1, 1)$, $b_3 = (3, -1, 1)$.

Aufgabe 4

Seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\mathrm{rg}(f) \geq \dim \ker(f)$.

b) $\mathrm{rg}(g \circ f) \geq \max(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

c) $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

d) Ist g surjektiv, so ist $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.