Aufgabe 1

Untersuchen Sie welche der folgenden Mengen G mit den angegebenen Verknüpfungen $*: G \times G \to G$ eine Gruppe bilden.

a) $G = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ mit

$$*: G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy,$$

der Multiplikation rationaler Zahlen.

b) $G = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ mit

$$*: G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto \frac{x}{y},$$

der üblichen Quotientenbildung in $\mathbb{Q}$.

c) $G = \{f \in M(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0, \text{ so dass } f(x) = ax + b\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ mit

$$*: G \times G \to G,\ (f, g) \mapsto f \circ g,$$

der Komposition von Abbildungen.

Aufgabe 2

Für $n \geq 3$ sei $d \in S(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $2\pi/n$ und $s \in S(\mathbb{R}^2)$ die Spiegelung an der x-Achse. Die Diedergruppe D_n ist definiert als Untergruppe der $S(\mathbb{R}^2)$ durch $D_n := \langle\{d, s\}\rangle$, also als das Erzeugnis dieser Drehung und Spiegelung.

a) Wie viele Elemente hat D_n?

b) Geben Sie in einer Liste die Verknüpfung von Elementen der Gruppe D_4 an.

c) Zeigen Sie, dass jede Drehung das Produkt zweier Spiegelungen ist. Das heißt, dass für jede Drehung d gilt, dass $d = s_0 \circ s_1$ für zwei Spiegelungen s_0, s_1.

Aufgabe 3

Die Menge der Einheiten eines Rings $(R, +, \cdot)$ ist definiert als

$$R^* = \{x \in R \mid \exists y \in R : x \cdot y = y \cdot x = 1\}.$$

Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Betrachten Sie die Abbildungen

$$+ : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X),\ (A, B) \mapsto (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

und

$$\cdot : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X),\ (A, B) \mapsto A \cap B.$$

a) Zeigen Sie, dass das Tripel $(\mathcal{P}(X), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

b) Bestimmen Sie die Menge der Einheiten dieses Rings.

c) Zeigen Sie, dass dieser Ring genau dann ein Körper ist, wenn X genau ein Element enthält.

Aufgabe 4

Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Die Abbildung $f : (G, *) \to (G, *),\ g \mapsto g^{-1}$, die jedes Gruppenelement auf ihr Inverses schickt, ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $(G, *)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Wenn $g^2 = e$ für alle $g \in G$ gilt, dann ist $(G, *)$ abelsch.

c) Sei $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $(G, *)$ abelsch. Dann gilt $(a_1 * \cdots * a_n)^2 = e$.

d) Seien $(G, *)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen mit vier Elementen. Dann gibt es einen Gruppenisomorphismus $\varphi : (G, *) \to (H, \circ)$.