Aufgabe 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Sei n ungerade und $A^t = -A$. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$ ist.

b) Sei $A^t A = E_n$. Zeigen Sie, dass $\det A \in \{1, -1\}$ ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass sich die Determinante einer Matrix nicht unter Spiegeln an der zweiten Diagonalen ändert. Konkret: Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit Koeffizienten $a_{i,j}$ sei $\tilde{A} \in K^{n \times n}$ definiert durch $\tilde{a}_{ij} := a_{n+1-j,n+1-i}$, also

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{n,n} & a_{n-1,n} & \dots & a_{1n} \\ a_{n,n-1} & a_{n-1,n-1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n-1,1} & \dots & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $\det \tilde{A} = \det A$ ist. Tipp: Finden Sie eine geeignete Permutation $\pi \in S_n$, so dass $\tilde{A} = P(\pi) A P(\pi)$ ist.

Aufgabe 3

a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n > 0$ eine natürliche Zahl. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b \\ b & & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n \times n}.$$

b) Zeigen Sie, dass die ganzzahlige Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ 3 & 4 & & & & 2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & n & & & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 \in \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$$

Determinante $(-1)^{n(n-1)/2} \cdot \dfrac{n^{n-1}(n+1)}{2}$ hat.

Aufgabe 4

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

in Abhängigkeit von $c \in \mathbb{R}$.

b) Seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $a_1, \ldots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

Determinante $\prod_{i,j\in\{1,\ldots,n\}:\, i<j}(a_j - a_i)$ hat.