## Aufgabe 1

a) Sei $\mathbb{R}^5$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Betrachten Sie den Untervektorraum $U = \langle (1,2,3,0,0), (0,1,1,1,1) \rangle$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U$ und von $U^\perp$.

b) Sei $U_2$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle\ ,\ \rangle : U_2 \times U_2 \to \mathbb{R}, \quad (P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

ein Skalarprodukt auf $U_2$ definiert wird und bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U_2$ bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$.

## Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $b_1$ und $b_2$ Bilinearformen definieren und überprüfen Sie, ob sie symmetrisch oder positiv definit sind.

a) $b_1 : V \times V \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Spur}(A^t B)$.

b) $b_2 : V \times V \to \mathbb{R}$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$.

## Aufgabe 3

Sei $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Für einen Vektor $v \in V$ mit Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot b_i$ definieren wir $M_\mathcal{B}(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$.

Sei nun $b : V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform auf $V$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Für $v, w \in V$ gilt $b(v,w) = M_\mathcal{B}(v)^t M_\mathcal{B}(b) \overline{M_\mathcal{B}(w)}$.

b) Sei $\mathcal{D}$ eine weitere Basis von $V$. Dann gilt

$$M_\mathcal{D}(b) = T^t_{\mathcal{D},\mathcal{B}} M_\mathcal{B}(b) \overline{T_{\mathcal{D},\mathcal{B}}}.$$

c) Die Sesquilinearform $b$ ist genau dann hermitesch, wenn $M_\mathcal{B}(b)^t = \overline{M_\mathcal{B}(b)}$.

d) Sei $q_b : V \to \mathbb{C}$, $v \mapsto b(v,v)$ die von $b$ induzierte quadratische Form. Für $v, w \in V$ gilt

$$b(v,w) = \frac{1}{4}(q_b(v+w) - q_b(v-w) + i \cdot q_b(v+iw) - i \cdot q_b(v-iw)).$$

**Aufgabe 4**

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Ist $b(v, v) > 0$ für alle Vektoren $v \in \mathcal{B}$ einer Basis $\mathcal{B}$ von $V$, so ist $b$ positiv definit.

b) Falls $b$ sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch ist, so ist $b = 0$.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit Diagonaleinträgen $a_{ii} > 0$. Dann ist die Bilinearform $b_A$ positiv definit.

d) Wenn $v \in V$ ein Vektor mit $b(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ ist, so gilt $v = 0$.