Übungen zur Linearen Algebra II | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 6 | Dr. Thorsten Weist
Abgabe bis 01.12.2016, 10 Uhr | M.Sc. Lucas Ruhstorfer

Aufgabe 1

Bestimmen Sie ein Jordanbasis und die entsprechende Jordan Normalform der folgenden (nilpotenten) Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (0, x_1, x_2, x_2)$

b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (0, x_1, x_1, x_2 + x_3)$

c) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, e_1 \mapsto e_2 + e_3, e_2 \mapsto e_5, e_3 \mapsto e_4, e_4 \mapsto e_2, e_5 \mapsto 0$

d) $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5, e_1 \mapsto e_3 + e_4, e_2 \mapsto e_3 + e_4, e_3 \mapsto e_5, e_4 \mapsto 0, e_5 \mapsto 0$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie eine Jordanbasis und die entsprechende Jordan Normalform der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 3

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Sei $\sigma(f)$ die Menge der Eigenwerte von f. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J(m_1, \lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(m_2, \lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & J(m_r, \lambda_r) \end{pmatrix}$$

für natürliche Zahlen $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ und Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \sigma(f)$. Für $\lambda \in \sigma(f)$ setze $I_\lambda = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid \lambda_i = \lambda\}$ und $n_\lambda = \max\{m_i \mid i \in I_\lambda\}$. Mit anderen Worten n_λ ist der größte auftretende Jordanblock zum Eigenwert λ. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Es gilt $\mu_f = \prod_{\lambda \in \sigma(f)} (X - \lambda)^{n_\lambda}$.

b) Für $\lambda \in \sigma(f)$ ist $|I_\lambda| = \mathrm{dim}\mathrm{Eig}(f, \lambda)$.

Aufgabe 4

Seien $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Bestimmen Sie (bis auf Permutation der Jordanblöcke) in folgenden Fällen alle möglichen Jordan Normalformen von f.

a) $\dim(V) = 4$ und $\mu_f = X^2$.

b) $\dim(V) = 5$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Sei weiterhin $\chi_f = (X-2)^3(X+1)^2$, $\dim(\mathrm{Eig}(f,2)) = 2$ und $\dim(\mathrm{Eig}(f,-1)) = 1$.

c) $\dim(V) = 6$ und $f^4 + 12f^2 = 6f^3 + 8f$. Außerdem gelte $\mathrm{rang}(f) = 3 \cdot \mathrm{rang}(f - 2\,\mathrm{id}_V) = 6$.

d) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Eigenwerte von f und es gelte $\chi_f = \mu_f$.